

2019-1 Final Exam

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2020 年 02 月 18 日



Problem 1: Mathematical Logic

请判断以下推理是否正确，请给出证明或者指出错误之处。要求给出严格的符号化推理过程。

前提:

- (1) 如果一个人害怕挑战，那么他就不会获得成功。
- (2) 每个人或者获得过成功，或者失败过。
- (3) 王二未曾失败过。

结论: 王二不害怕挑战。

$x \in Human$ $w \in Human$: 王二

$C(x)$: x 害怕挑战

$W(x)$: x 成功过

$L(x)$: x 失败过

(1) 如果一个人害怕挑战，那么他就不会获得成功。

(2) 每个人或者获得过成功，或者失败过。

(3) 王二未曾失败过。

结论：王二不害怕挑战。

$$\forall x : C(x) \implies \neg W(x) \quad (1)$$

$$\forall x : W(x) \vee L(x) \quad (2)$$

$$\neg L(w) \quad (3)$$

$$\neg C(w)$$

$$\forall x : C(x) \implies \neg W(x) \quad (1)$$

$$\forall x : W(x) \vee L(x) \quad (2)$$

$$\neg L(w) \quad (3)$$

$$\neg C(w)$$

$$\forall x : C \implies W$$

$$C(x) \implies W(x)$$

$$\forall x : C(x) \implies \neg W(x) \quad (1)$$

$$\forall x : W(x) \vee L(x) \quad (2)$$

$$\neg L(w) \quad (3)$$

$$\neg C(w)$$

$$C(w) \implies \neg W(w) \quad (4)$$

$$W(w) \vee L(w) \quad (5)$$

$$\neg L(w) \quad (6)$$

$$W(w) \quad (5) + (6) \quad (7)$$

$$\neg C(w) \quad (4) + (7) \quad (8)$$

Problem 2: Mathematical Induction

令 $n, k \in \mathbb{N}^+$, 且 $n \geq k$ 。请使用**数学归纳法**证明

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

是整数。

Problem 2: Mathematical Induction (Original Version)

令 $n, k \in \mathbb{N}^+$, 且 $n \geq k$ 。请证明

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

是整数。

$$\binom{n}{k} \triangleq \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Combinatorial Interpretation

of ways to choose a k -element subset from an n -element set

Problem 2: Mathematical Induction

令 $n, k \in \mathbb{N}^+$, 且 $n \geq k$ 。请使用数学归纳法证明

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

是整数。

By induction on ...

Base Case

Induction Hypothesis

Induction Step

n vs. k

$$\binom{n}{k} \triangleq \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

By induction on n .

$$P(n) \triangleq \forall k \leq n : \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : P(n)$$

$$\binom{n}{k} \triangleq \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}$$

$$P(n) \triangleq \forall k \leq n : \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

By induction on n .

Base Case: $P(1)$

$$\binom{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$$

Induction Hypothesis: Suppose that

$$P(n) \triangleq \forall k \leq n : \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

Induction Step: Consider $P(n + 1)$.

$$P(n + 1) \triangleq \forall k \leq n + 1 : \binom{n + 1}{k} \in \mathbb{N}$$

$$\forall k \leq n + 1 : \binom{n + 1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k - 1}$$

CASE I

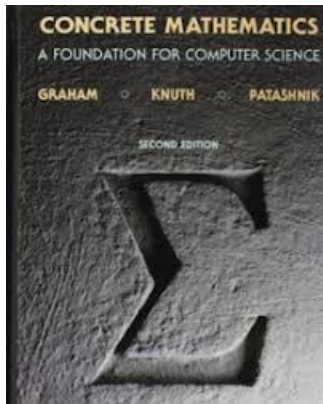
$$k = n + 1$$

$$\binom{n + 1}{n + 1} = 1 \in \mathbb{N}$$

CASE II

$$k \leq n$$

$$\binom{n + 1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k - 1} \in \mathbb{N}$$



Problem 5: Function

对任意函数 f 和集合 A, B 。

- (1) 请证明 $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ 。当 f 满足什么条件时，“=” 成立？
- (2) 请证明 $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ 。

$$y \in f(X) \iff \exists x \in X : y = f(x)$$

$$x \in f^{-1}(Y) \iff f(x) \in Y$$

Problem 5: Function

对任意函数 f 和集合 A, B 。

(1) 请证明 $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ 。当 f 满足什么条件时，“=” 成立？

$$\forall y : y \in f(A) \setminus f(B) \implies y \in f(A \setminus B)$$

$$y \in f(A) \setminus f(B)$$

$$\iff y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$$

$$\iff (\exists x \in A : f(x) = y) \wedge \neg(\exists x \in B : f(x) = y)$$

$$\iff (\exists x \in A : f(x) = y) \wedge (\forall x \in B : f(x) \neq y)$$

$$\implies \exists x \in A \setminus B : f(x) = y \text{ (take } t \in A : f(t) = y)$$

$$\iff \begin{matrix} y \in f(A \setminus B) \\ y \in f(A \setminus B) \iff \exists x \in A \setminus B : f(x) = y \end{matrix}$$

$$\text{Take } t \in A : f(t) = y$$

Problem 5: Function

对任意函数 f 和集合 A, B 。

(1) 请证明 $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ 。当 f 满足什么条件时，“=” 成立？

$$\begin{aligned} & (\exists x \in A : f(x) = y) \wedge (\forall x \in B : f(x) \neq y) \\ \implies & \exists x \in A \setminus B : f(x) = y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \exists x \in A \setminus B : f(x) = y \\ \implies & (\exists x \in A : f(x) = y) \wedge (\forall x \in B : f(x) \neq y) \end{aligned}$$

f is injective.

Problem 5: Function

对任意函数 f 和集合 A, B 。

(2) 请证明 $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ 。

$$\forall x : x \in f^{-1}(A \setminus B) \iff x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(A \setminus B) \\ \iff & f(x) \in A \setminus B \\ \iff & f(x) \in A \wedge f(x) \notin B \\ \iff & x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B) \\ \iff & x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Theorem (Properties of f and f^{-1} (UD Theorem 17.7))

$$f : A \rightarrow B \quad A_1, A_2 \subseteq A, B_1, B_2 \subseteq B$$

(i) f preserves only \subseteq and \cup :

$$(1) A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$$

$$(2) f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$(3) f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$(4) f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$$

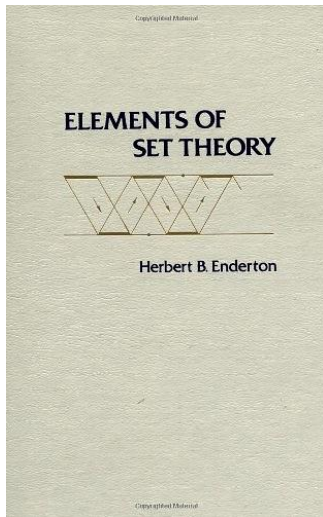
(ii) f^{-1} preserves $\subseteq, \cup, \cap,$ and \setminus :

$$(5) B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$$

$$(6) f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

$$(7) f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

$$(8) f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$$



Problem 6: Infinity

请证明: \mathbb{N} 的所有有限子集所组成的集合是可数的。

$$X \triangleq \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} : |A| = n\}$$

$$f : X \xrightarrow{1-1} \mathbb{N} \quad f : A \mapsto ?$$

$$A = \{0, 2, 1, 7\} \quad a = 1110000100000 \dots$$

$$a = a_0 a_1 \dots \quad a_k = \begin{cases} 1, & k \in A \\ 0, & k \notin A \end{cases}$$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^k \in \mathbb{N}$$

Problem 6: Infinity

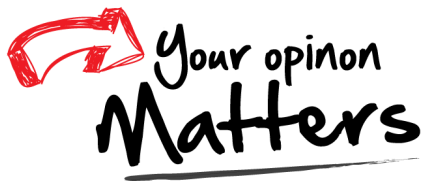
\mathbb{N} 的所有子集所组成的集合是不可数的。

$$|2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$$



$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^k \text{ may } \notin \mathbb{N}$$

Thank
You!



Office 302

Mailbox: H016

hfwei@nju.edu.cn