每周安排

教学理念	课程安排
自我探索	周一大班课前：阅读教材 + 交书面作业
深度引导	周一大班 + 周三小班OT
理论严密	书面作业严格批改：形式化 + 证明过程
训练充分	书面作业 + 周四大班OJ

	周一	周二	周三	周四	周五
8:00-9:50	交书面作业 大班		小班1 讲OT	交OT 大班 完成OJ	
10:10-12:00			小班2 讲OT		

书面作业：
纸质或PDF

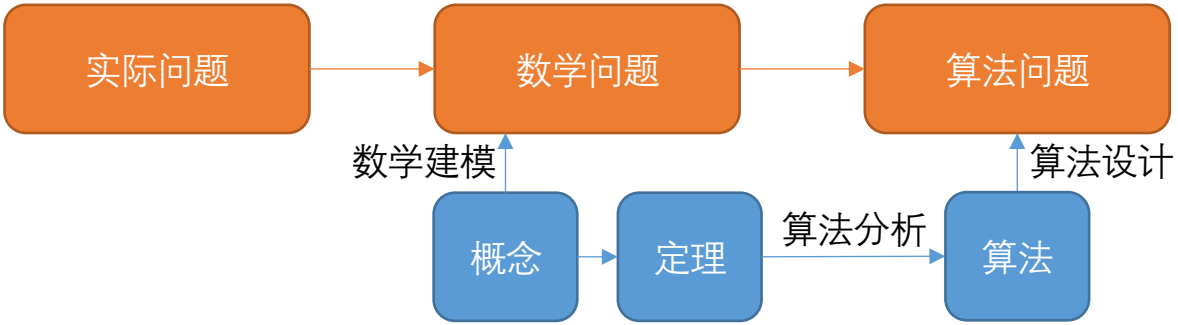
OT：
15-20分钟

OJ：
基础实验楼乙124

教学周历

- 第01周：图的基本概念
- 第02周：连通和遍历
- 第03周：圈和遍历
- 第04周：连通度
- 第05周：匹配
- 第06周：单源最短路
- 第07周：多源最短路
- 第08周：最小生成树
- 第09周：问题的形式化描述
- 第10周：NP完全理论初步
- 第11周：有向图和伪多项式时间算法
- 第12周：分支定界和局部搜索算法
- 第13周：松弛算法
- 第14周：近似算法的基本概念
- 第15周：独立、覆盖和支配
- 第16周：染色
- 第17周：平面
- 寒假自学：背包问题

教学内容

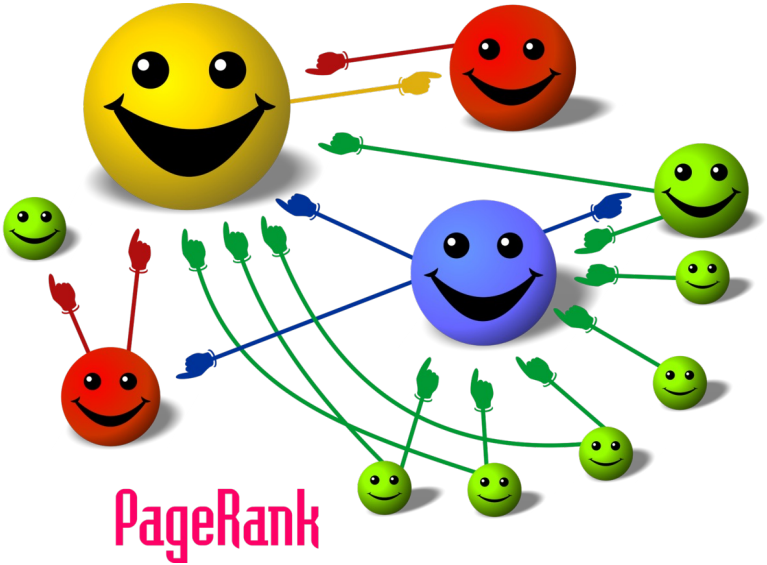


3-1 图的基本概念

程龚

图论为什么重要？

- 搜索引擎（互联网）



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/69/PageRank-hi-res.png/1200px-PageRank-hi-res.png

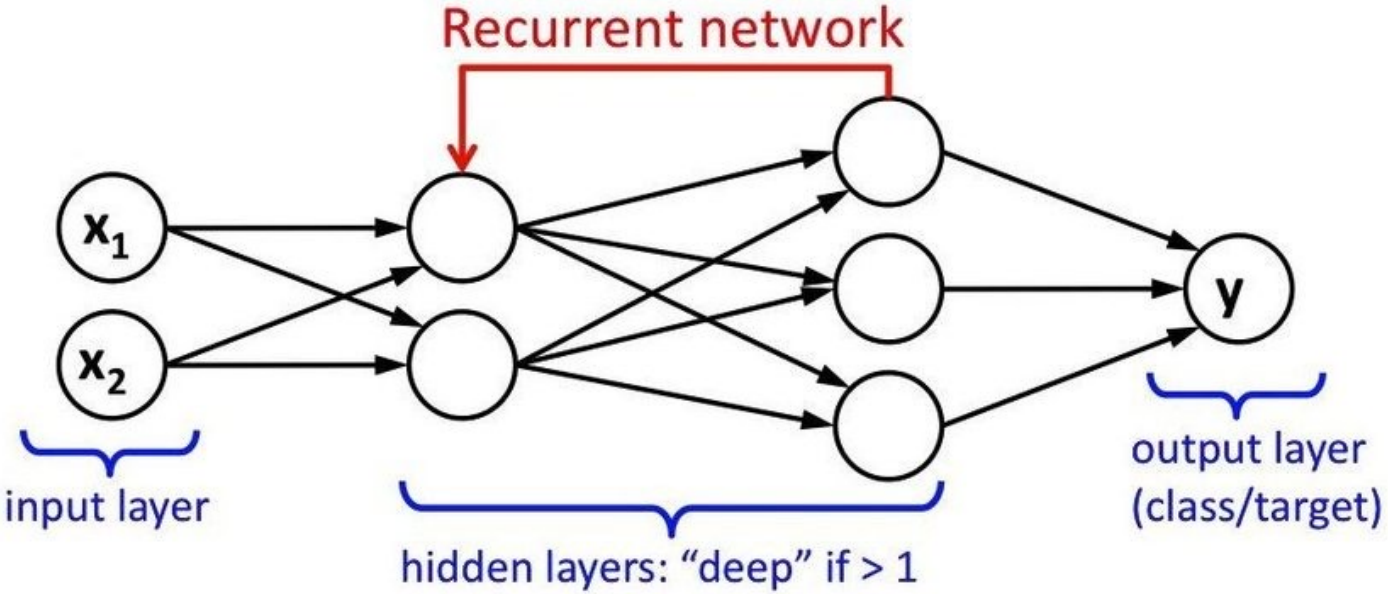
图论为什么重要？

- 知识图谱（人工智能）

https://www.itforschools.com.au/internet/struggling-with-internet-access-at-home/

图论为什么重要?

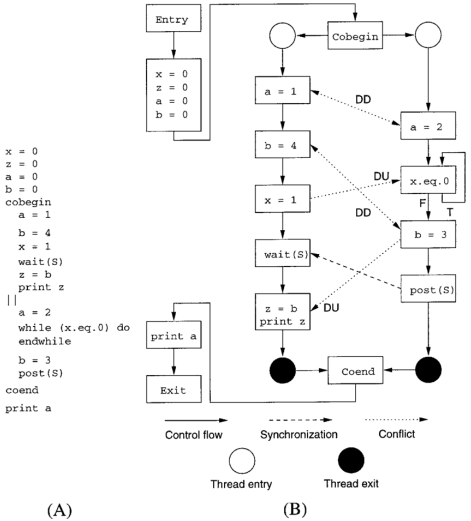
- 深度神经网络（机器学习）

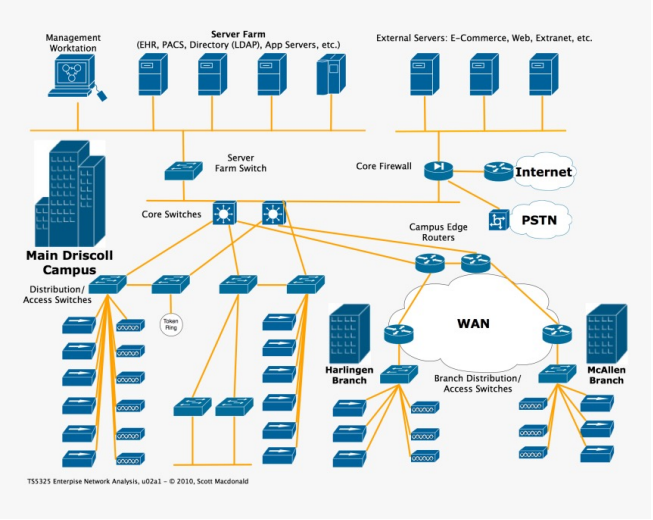


https://www.researchgate.net/figure/Recurrent-neural-networkRNN-or-Long-Short-Term-MemoryLSTM-5616_fig2_324883736

图论为什么重要？

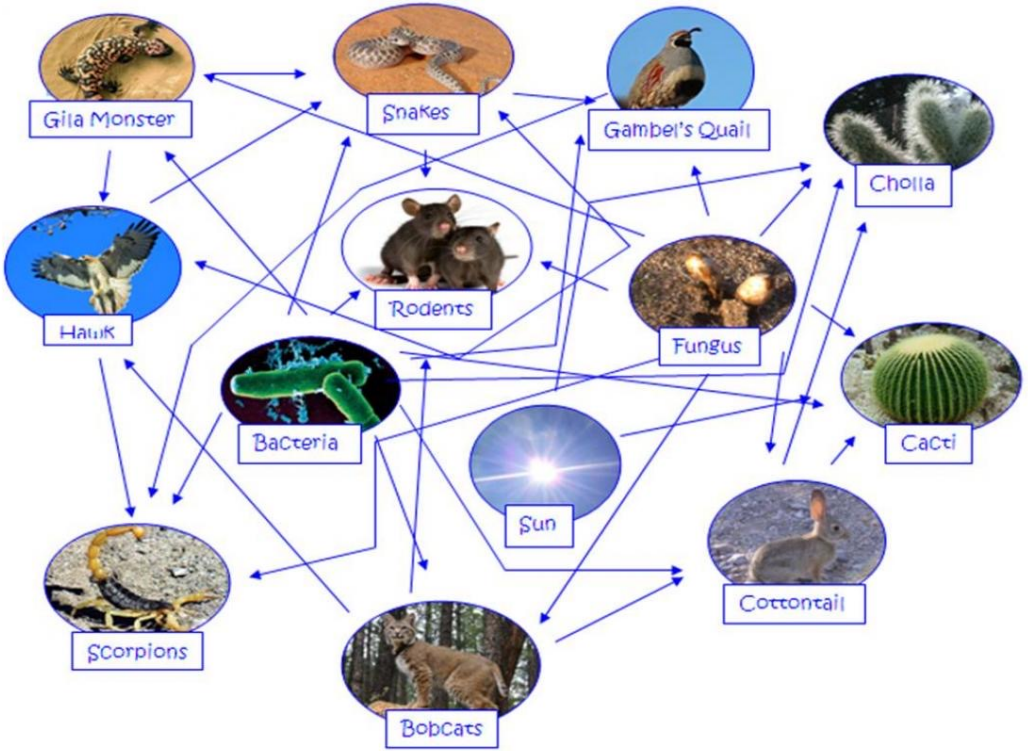
- 控制流图（软件分析）、计算机网络……





https://www.researchgate.net/figure/A-sample-code-and-its-Concurrent-Control-Flow-Graph-A-The-sample-code-B-The-CCFG_fig3_220091344
https://www.pngitem.com/middle/hbmmRx_network-diagram-computer-science-hd-png-download/

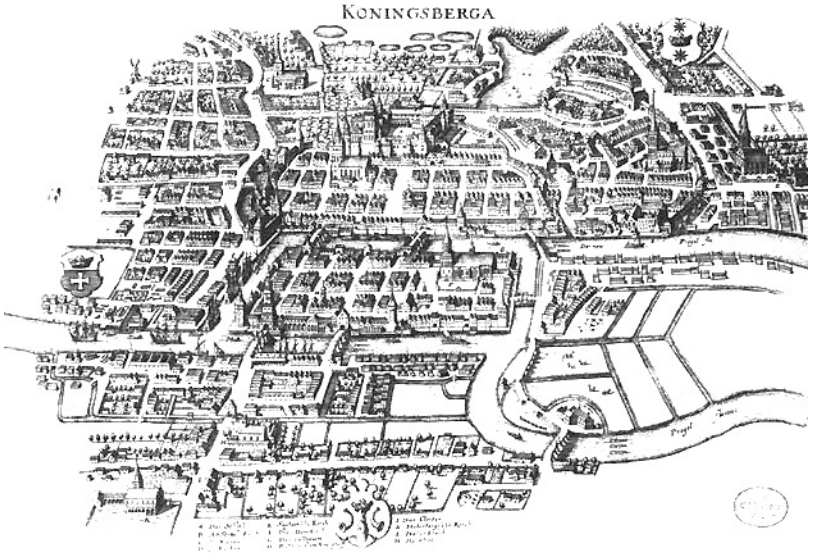
图，也在我们身边

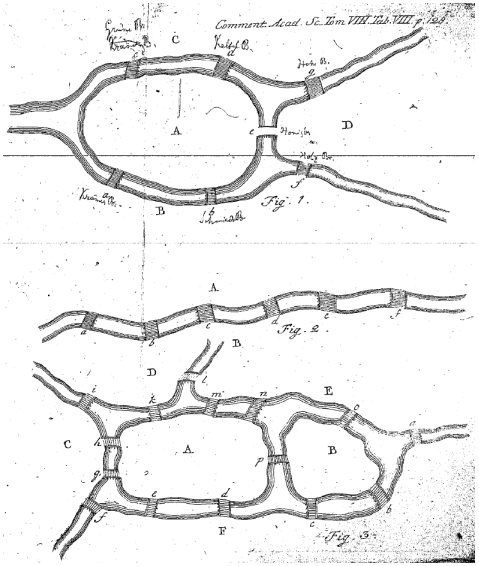


http://www.chainconveyordesign.net/wp-content/uploads/2012/01/Sahara-Desert-Food-Chain1.jpg

你能自己举个日常生活中的例子吗？

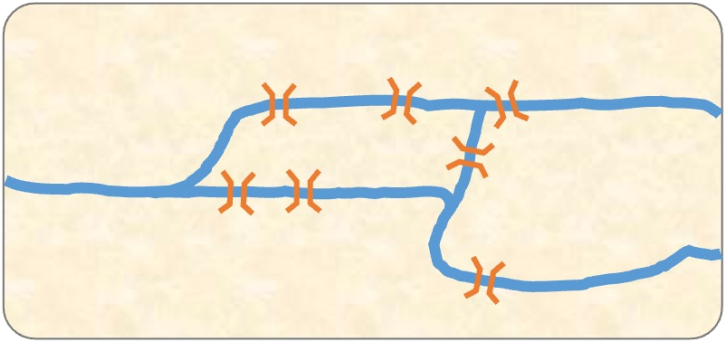
你能说说什么是柯尼斯堡七桥问题吗？

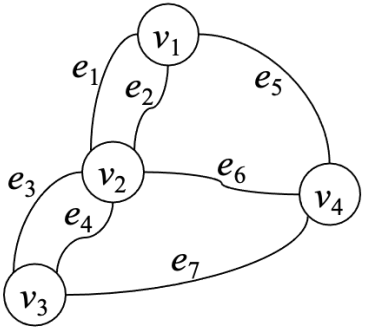




http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg
Leonhard Euler. Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis (1736)

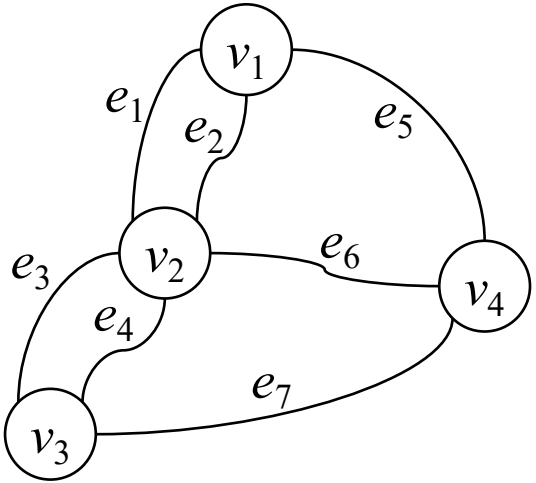
你能说说什么是柯尼斯堡七桥问题吗？





图的数学本质是什么？

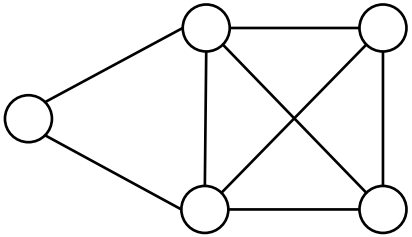
- 图：$G = <V, E>$
  - V：顶点（结点）的有限**集合**
  - E：边的有限**集合**
    - 边$e_1 = (v_1, v_2)$是V中顶点v_1和v_2组成的**无序对**



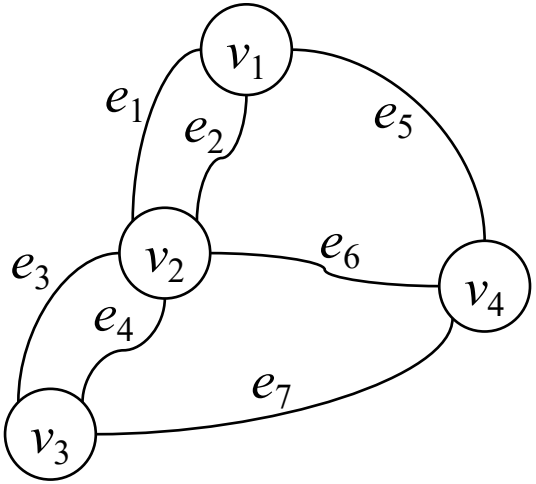
图论和几何的区别

- 图：$G = <V, E>$
  - V：顶点（结点）的有限集合
  - E：边的有限集合
    - 边$e_1 = (v_1, v_2)$是V中顶点v_1和v_2组成的无序对

有多少个“三角形”？



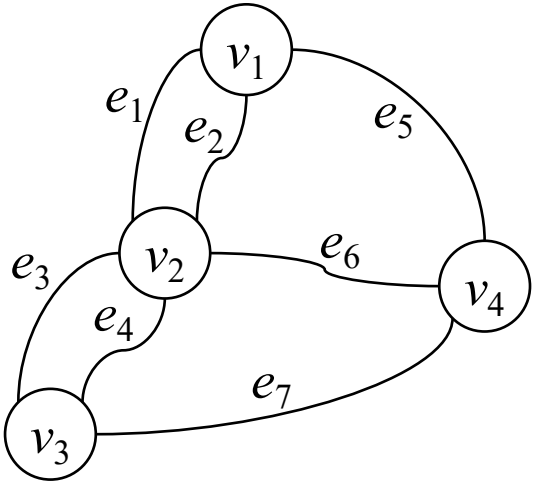
你能解释这些术语吗？



- 图：$G = <V, E>$
  - V：顶点（结点）的有限集合
  - E：边的有限集合
    - 边$e_1 = (v_1, v_2)$是V中顶点v_1和v_2组成的无序对
- 一些术语
  - 端点、关联、相邻
  - 阶、边数
  - 零图、空图、平凡图
  - 重边（平行边）、自环、简单图

    思考题 1.1 阶为 n 的简单图的边数的上界是多少?
  - 完全图
  - 度、孤立点、度序列、最大度、最小度、r正则图

你能解释这些术语吗？



- 图：$G = <V, E>$
  - V：顶点（结点）的有限集合
  - E：边的有限集合
    - 边$e_1 = (v_1, v_2)$是V中顶点v_1和v_2组成的无序对
- 一些术语
  - 端点、关联、相邻
  - 阶、边数
  - 零图、空图、平凡图
  - 重边（平行边）、自环、简单图

    思考题 1.1 阶为 n 的简单图的边数的上界是多少?
  - 完全图
  - 度、孤立点、度序列、最大度、最小度、r正则图

    思考题 1.5 对于阶至少为 2 的图 G，从 G 中删除度最大的一个顶点及其关联的所有边，G 中顶点的度的平均值有可能提高、不变还是降低?

    思考题 1.6 对于阶至少为 2 的图 G，从 G 中删除度最小的一个顶点及其关联的所有边，G 中顶点的度的平均值有可能提高、不变还是降低?

请证明下述定理和推论

定理 1.1 对于任意一个图 $G = \langle V, E \rangle$，顶点集 V 中所有顶点的度的和等于 G 的边数的 2 倍：

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot \epsilon(G) . \tag{1.1}$$

推论 1.1 任意一个图中，度为奇数的顶点有偶数个。

你能解释图的两种矩阵表示吗？

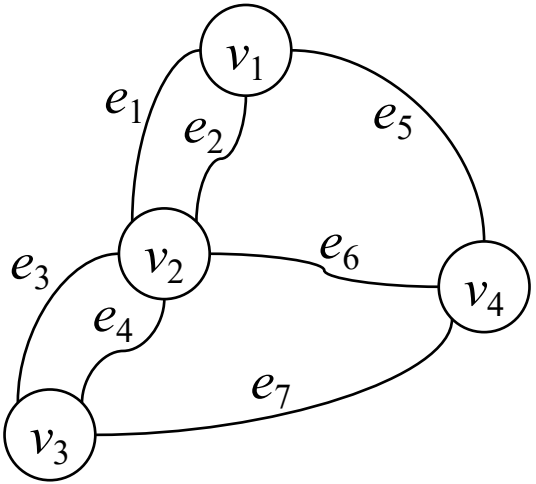
- 邻接矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 关联矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

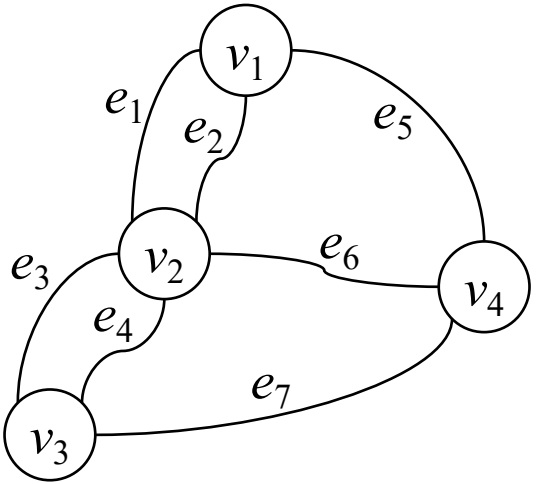
自环如何表示？



第i行元素之和、第i列元素之和，分别表示什么意思？

- 邻接矩阵

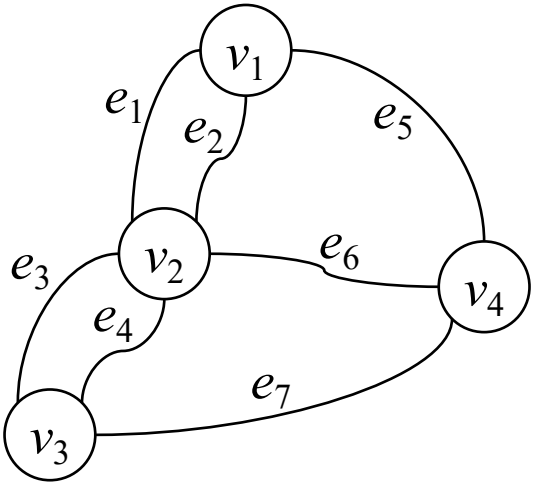
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



简单图、完全图、正则图的邻接矩阵分别有什么特征？

- 邻接矩阵

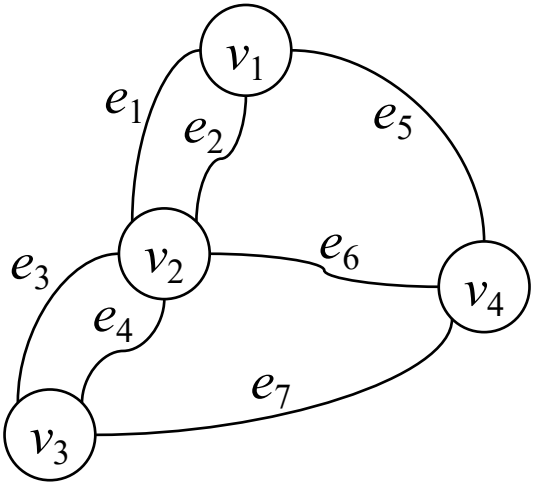
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



第i行元素之和、第i列元素之和，分别表示什么意思？

- 关联矩阵

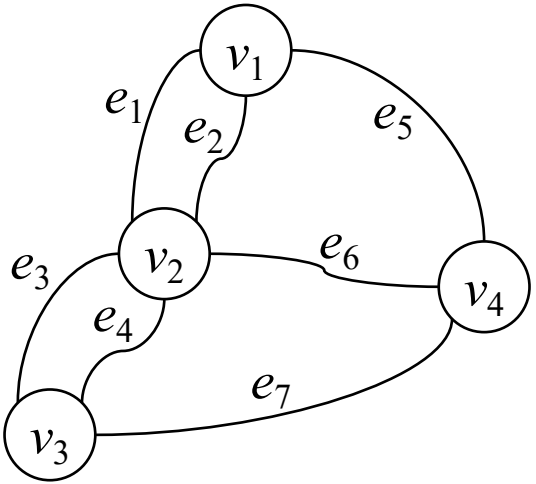
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



简单图、完全图、正则图的关联矩阵分别有什么特征？

- 关联矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



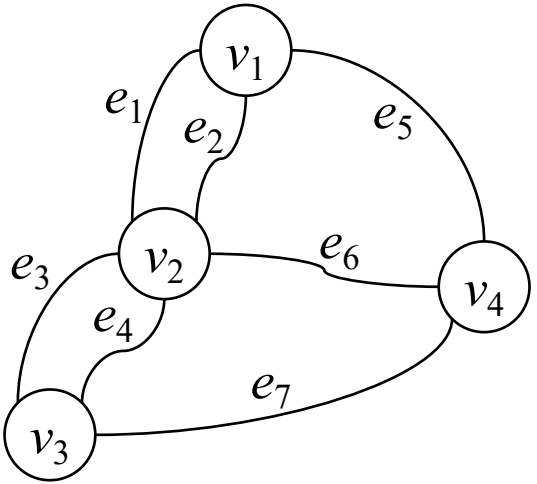
你能比较两种表示的优缺点吗？

- 邻接矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 关联矩阵

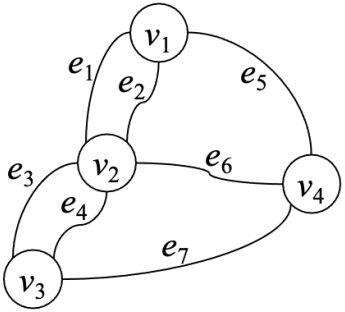
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



你能解释邻接矩阵的两种数据结构吗？

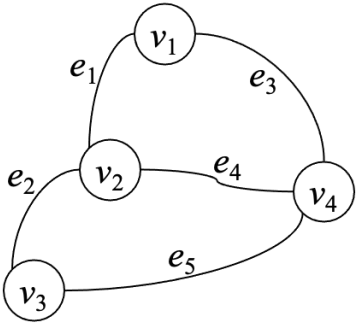
- 二维数组

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- 邻接表

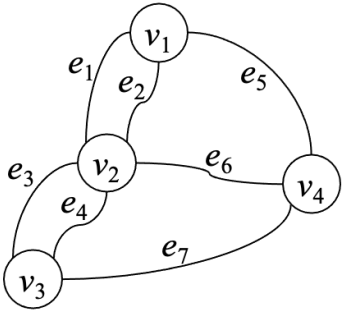
顶点	邻点列表
v_1	v_2, v_4
v_2	v_1, v_3, v_4
v_3	v_2, v_4
v_4	v_1, v_2, v_3



你能比较两种数据结构的优缺点吗？

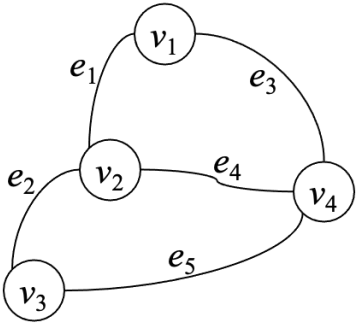
- 二维数组

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



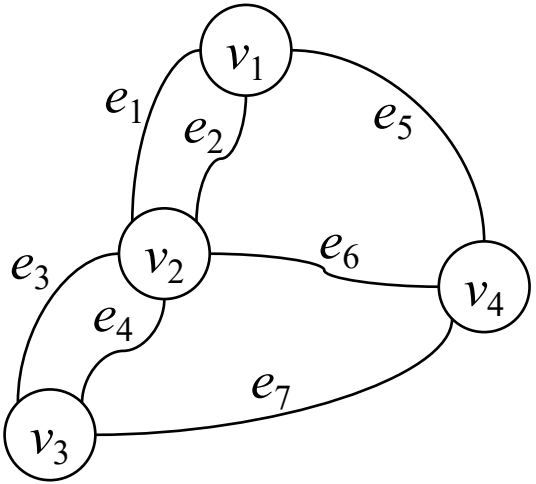
- 邻接表

顶点	邻点列表
v_1	v_2, v_4
v_2	v_1, v_3, v_4
v_3	v_2, v_4
v_4	v_1, v_2, v_3



你能解释两个图之间的这些关系吗？

- 子图
- 真子图
- 生成子图
- 点导出子图
- 边导出子图

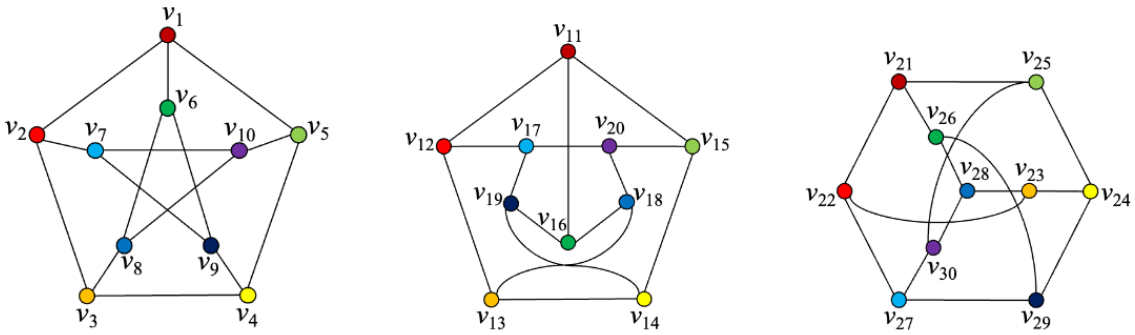


思考题 1.12 阶为 n、边数为 m 的图的生成子图、点导出子图、边导出子图分别有多少种？

你能解释两个图之间的这些关系吗？

- 同构

思考题 1.15 两个图同构有哪些必要条件？它们是充分条件吗？

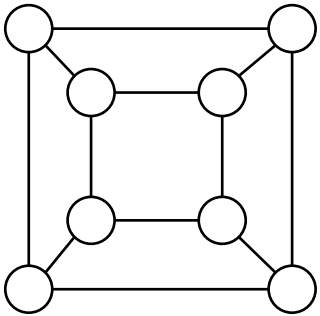


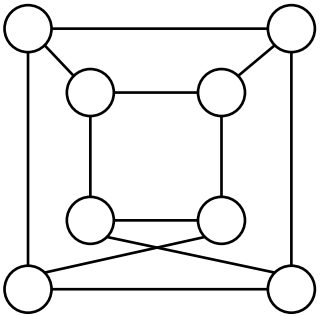
(a) (b) (c)

你能解释两个图之间的这些关系吗？

- 同构

思考题 1.15 两个图同构有哪些必要条件？它们是充分条件吗？





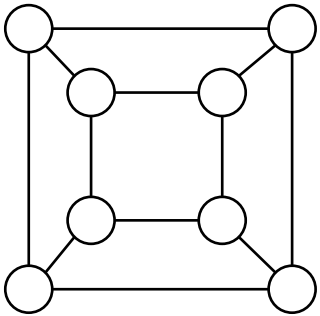
你能解释两个图之间的这些关系吗？

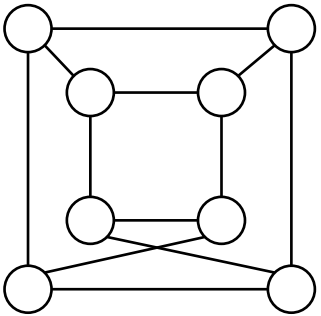
- 同构

思考题 1.15 两个图同构有哪些必要条件？它们是充分条件吗？

思考题 1.16 两个同构图的邻接矩阵有什么特征？

思考题 1.17 对于同构图 G 和 H，从 G 到 H 的同构（双射）唯一吗？





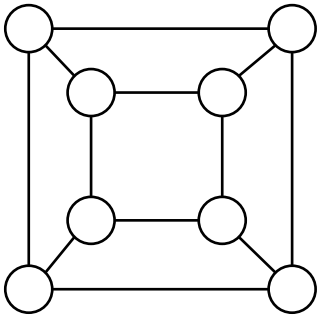
请证明下述定理

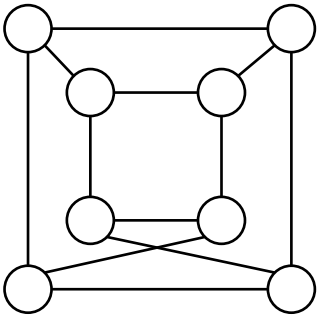
定理 1.2 同构关系是定义在所有简单图的集合上的等价关系。

你能解释两个图之间的这些关系吗？

- 自同构

思考题 1.13 每个图都有自同构吗？





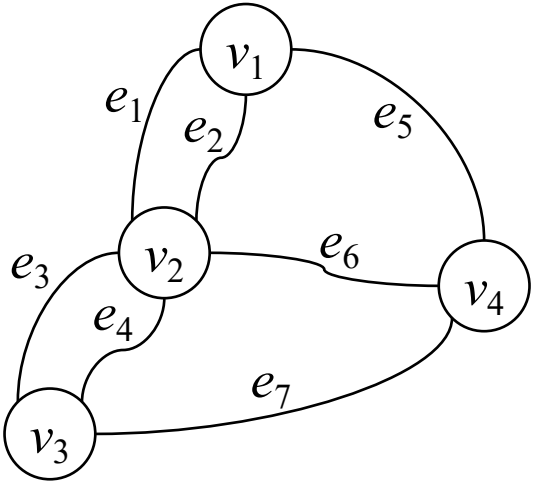
你能解释图的这些操作吗？

- 删除边（子集）

  思考题 1.18 对于图 $G = \langle V, E \rangle$ 的边子集 $E' \subseteq E$，比较图 $G - E'$ 和边导出子图 $G[E \setminus E']$。

- 删除顶点（子集）

  思考题 1.19 对于图 $G = \langle V, E \rangle$ 的顶点子集 $V' \subseteq V$，比较图 $G - V'$ 和点导出子图 $G[V \setminus V']$。



你能解释图的这些运算吗？

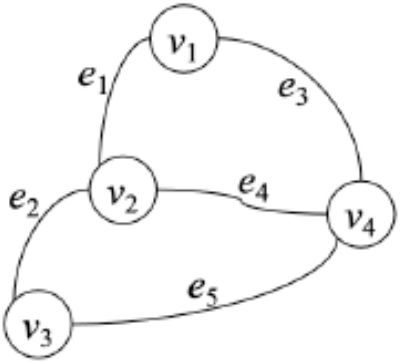
- 补图

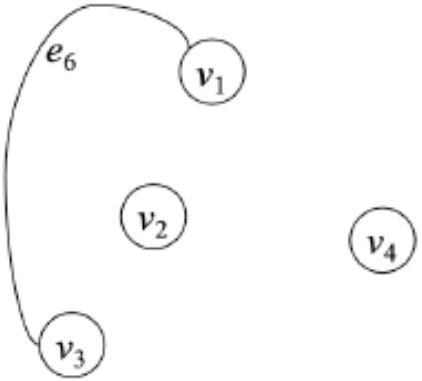
思考题 1.20 空图、完全图、正则图的补图分别是什么？

思考题 1.21 若图 G 和 H 同构，则图 $\overline{G}$ 和 $\overline{H}$ 也同构吗？

思考题 1.22 图 G 和 $\overline{\overline{G}}$ 有什么关系？

思考题 1.23 图 G 和 $\overline{G}$ 的阶、边数、度序列、邻接矩阵分别有什么关系？

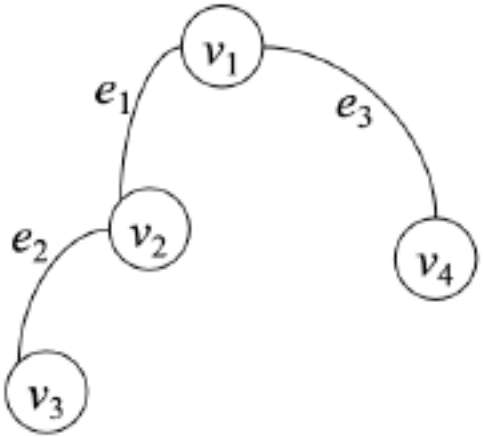




你能解释图的这些运算吗？

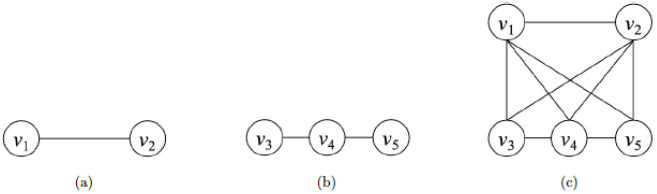
- 自补图

思考题 1.24 (◇) 自补图的阶、边数、度序列、邻接矩阵分别有什么特征？



你能解释图的这些运算吗？

- 交
- 并
- 不交并（和）
- 联



思考题 1.25 图 G、H、$G \cap H$、$G + H$、$G \vee H$ 中，哪些具有子图关系？

OT

- 图在计算机和人工智能研究中有很多应用，例如程序分析中的控制流图、信息检索中的网页链接图、知识表示中的知识图谱等，请调研至少2种应用（其中至多1种来自上述例子），描述应用场景，讨论用图建模的方式，形式化描述问题并概述现有解决方案。