- 教材讨论
  - UD第5、18章
  - ES第24节

# 问题1：证明的方法

- 你理解这些证明方法了吗？
  - Direct proof
  - Proof by contradiction
  - Proof in cases
  - Mathematical induction
  - Pigeonhole principle

# 问题1：证明的方法 (续)

- 头脑风暴：这些方法分别适合于哪些题型？
  - Direct proof
  - Proof by contradiction
  - Proof in cases
  - Mathematical induction
  - Pigeonhole principle

# 问题1：证明的方法 (续)

- 你能用逻辑的方式说明它们的正确性吗？
  - Direct proof
  - Proof by contradiction
  - Proof in cases
  - Mathematical induction
  - Pigeonhole principle

# 问题1：证明的方法 (续)

- Proof by contradiction
  - 条件：P
  - 结论：Q
  - $P\wedge(\neg Q\rightarrow\neg P) \rightarrow Q$
    是永真式

# 问题1：证明的方法 (续)

- Direct proof

# 问题1：证明的方法 (续)

- Direct proof
  - 条件：$P_0$
  - 结论：$P_n$

  - $P_0 \wedge (P_0 \to P_1) \wedge (P_1 \to P_2) \wedge \ldots \wedge (P_{n-1} \to P_n) \to P_n$ 是永真式

# 问题1：证明的方法 (续)

- Proof in cases

# 问题1：证明的方法 (续)

- Proof in cases
  - 条件：P
  - 结论：Q
  - $P \wedge (P \Leftrightarrow P_1 \vee \ldots \vee P_n) \wedge (P_1 \rightarrow Q) \wedge \ldots \wedge (P_n \rightarrow Q) \rightarrow Q$ 是永真式

# 问题1：证明的方法 (续)

- Mathematical induction

# 问题1：证明的方法 (续)

- Mathematical induction
  - 命题：P
  - $P_1 \land (P_1 \rightarrow P_2) \land (P_2 \rightarrow P_3) \land \ldots \rightarrow P_1 \land P_2 \land \ldots$ 是永真式

# 问题1：证明的方法 (续)

- Pigeonhole principle

# 问题2：数学归纳法的应用

- 你能通过数学归纳法严谨地解释扑克牌魔术的原理吗？
  - 关键点：P(n)是什么？

一个用纸牌玩的小“魔术”：

- 将一付纸牌按照红黑相间的模式排好；
- 按照传统方式洗一次牌，分牌时两叠牌显出的两张颜色互异；
- 接下来看我的吧！

<u>洗完后，从首张起每2张不同色！</u>

# 问题2：数学归纳法的应用 (续)

- 你能通过数学归纳法严谨地解释扑克牌魔术的原理吗？
  - 前提：n为正偶数
  - 欲证：P(n)
    - 如果，总数为n的两个牌序列，无连续同色且末张不同；那么，洗完以后的牌序列，从首张起每2张不同色。
  - 数学归纳法
    - n=2时，证明两种情况……
    - 假设n=k时，P(n)成立，则n=k+2时，证明两种情况……

# 问题2：数学归纳法的应用 (续)

- 每个表达式总与一个合取/析取范式等价
  1. 当表达式中运算符的数量为0时……
  2. 设表达式中运算符的数量为k时成立
  3. 对于任意一个运算符的数量为k的表达式，在最前或最后添加一个运算符和一个符号，使其成为一个运算符的数量为k+1的表达式……
- 这个证明过程正确吗？

# 问题3：鸽巢原理的应用

- n个人相互握手，两人之间最多握一次，但没有人一次也不握，则至少有两个人握手次数相同

# 问题3：鸽巢原理的应用

- n个人相互握手，两人之间最多握一次，但没有人一次也不握，则至少有两个人握手次数相同

- 鸽子：人，$n$个
- 巢：可能的握手次数，正整数，最小值为1，最大值为$n$−1，共有$n$−1个
- 鸽子数($n$) 大于 巢数($n$−1)

# 问题3：鸽巢原理的应用 (续)

- 某棋手在连续77天中每天至少下一盘棋，但总共下棋不超过132盘。则不管任何排日程，一定有连续若干天正好共下21盘。

# 问题3：鸽巢原理的应用 (续)

- 某棋手在连续77天中每天至少下一盘棋，但总共下棋不超过132盘。则不管任何排日程，一定有连续若干天正好共下21盘。
- 用正整数序列$a_1, a_2, \ldots, a_{77}$ 表示从第一天到相应每天结束时已经下的**总盘数**。则$a_j = a_i + 21$表示从第i+1天到第j天恰好下了21盘。
  - 鸽子：序列$a_1, a_2, \ldots, a_{77}, a_1+21, a_2+21, \ldots, a_{77}+21$, 共**154**只
  - 巢：序列中元素可能的取值：1,2,...,153(132+21), 共153个
  - 注意序列中前半段和后半段分别均为单调递增(每天至少下一盘)，所以相等的两个值只能分布在前后两段中。

# 问题3：鸽巢原理的应用 (续)

- 在从1开始的前12个自然数中任取7个数，一定存在两个数，其中的一个数是另一个数的整数倍。
  - 鸽子？
  - 巢？

# 问题3：鸽巢原理的应用 (续)

- 在前12个自然数中任取7个数，一定存在两个数，其中的一个数是另一个数的整数倍。
  - 鸽子？
  - 巢？

$A_1=\{1\cdot 2^0, 1\cdot 2^1, 1\cdot 2^2, 1\cdot 2^3\}$

$A_2=\{3\cdot 2^0, 3\cdot 2^1, 3\cdot 2^2\}$

$A_3=\{5\cdot 2^0, 5\cdot 2^1\}$

$A_4=\{7\cdot 2^0\}$

$A_5=\{9\cdot 2^0\}$

$A_6=\{11\cdot 2^0\}$