- 教材讨论
  - TC第1、2、3章

问题1：计算问题与算法

- 什么是a well-specified computational problem？
- 问题和问题的实例有什么区别？
- 什么是an algorithm？

- 你能举一组例子吗？

问题1：计算问题与算法 (续)

- a well-specified computational problem
  - input + output + their relationship
- an algorithm
  - well-defined computational procedure for achieving an input-output relationship

问题1：计算问题与算法 (续)

- 回忆一下，你设计过哪些糟糕的算法？糟糕在什么地方？
- 你觉得什么是一个“好”算法？

问题1：计算问题与算法 (续)

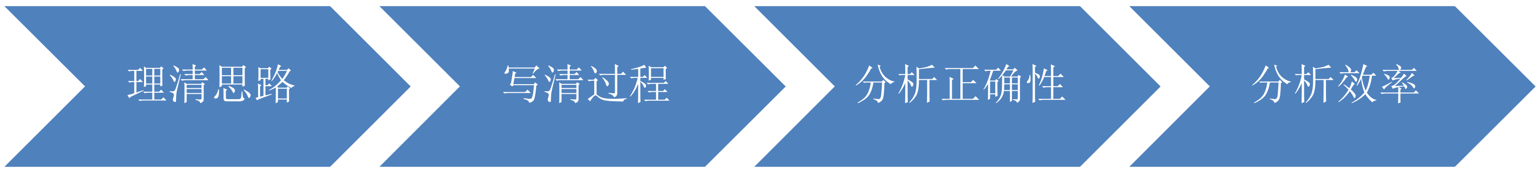
- 回忆一下，你设计过哪些糟糕的算法？糟糕在什么地方？
- 你觉得什么是一个“好”算法？
  - 正确的：总能停止且结果正确
  - 高效的：运行速度快、占用空间少
  - 易实现的：描述清晰、简单

问题1：计算问题与算法 (续)

- 你能不能总结一下，算法设计的一般步骤是什么？

问题1：计算问题与算法 (续)

- 你能不能总结一下，算法设计的一般步骤是什么？



问题2：算法的正确性分析

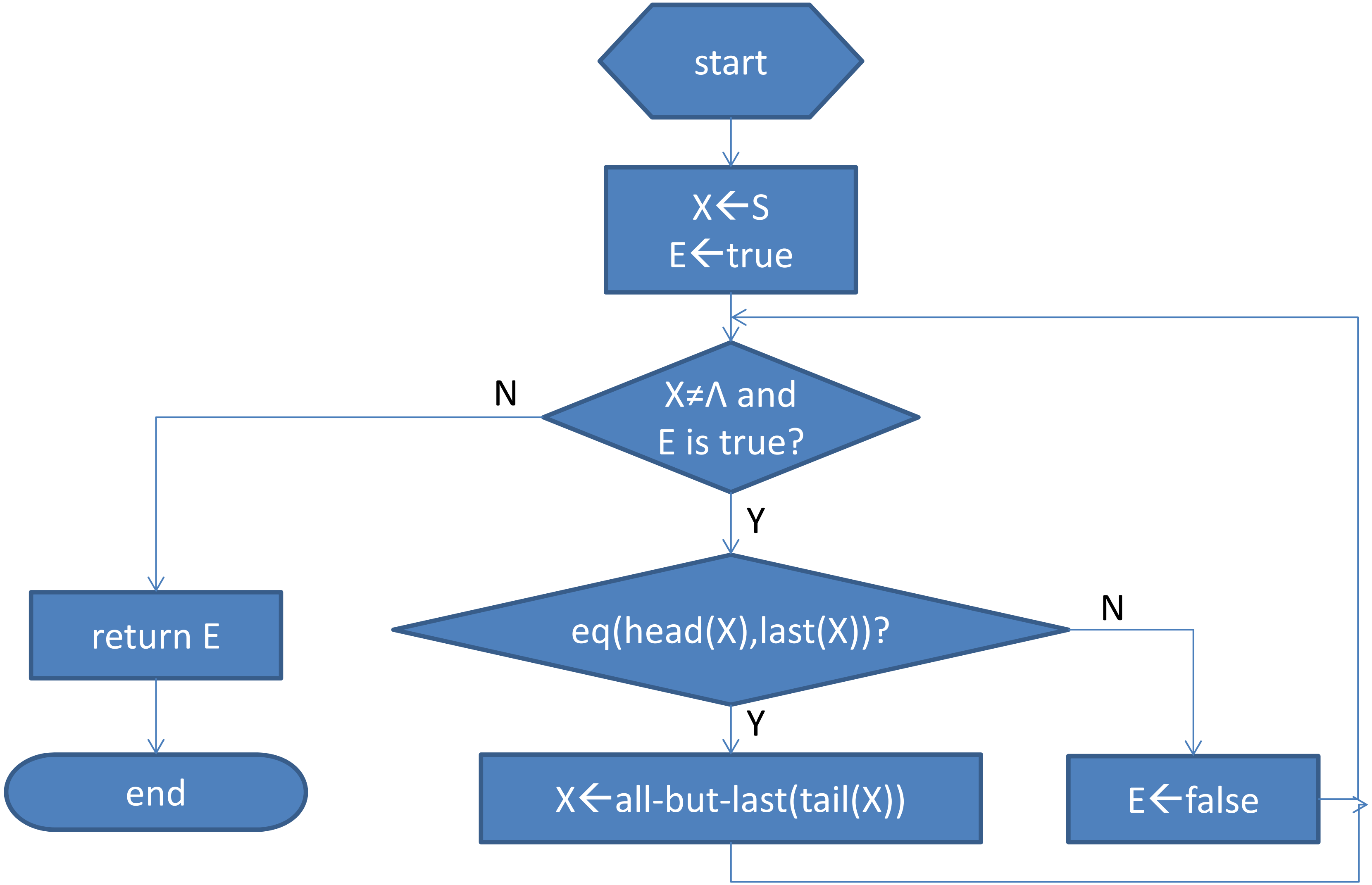
- 你还记得如何证明算法的正确性吗？
  - 什么是partially correct？如何证明？
  - 什么是totally correct？如何证明？

问题2：算法的正确性分析 (续)

- 如何证明算法是partially correct？
  1. 设置checkpoint
     - start后和end前各一个
     - 每个回路上至少一个（通常是第一次进入回路时）
  2. 为每个checkpoint设置invariant（最后一个invariant是算法期望的结果）
  3. 检查所有checkpoint之间的路径，说明为什么路径起点的invariant成立时，路径终点的invariant也成立

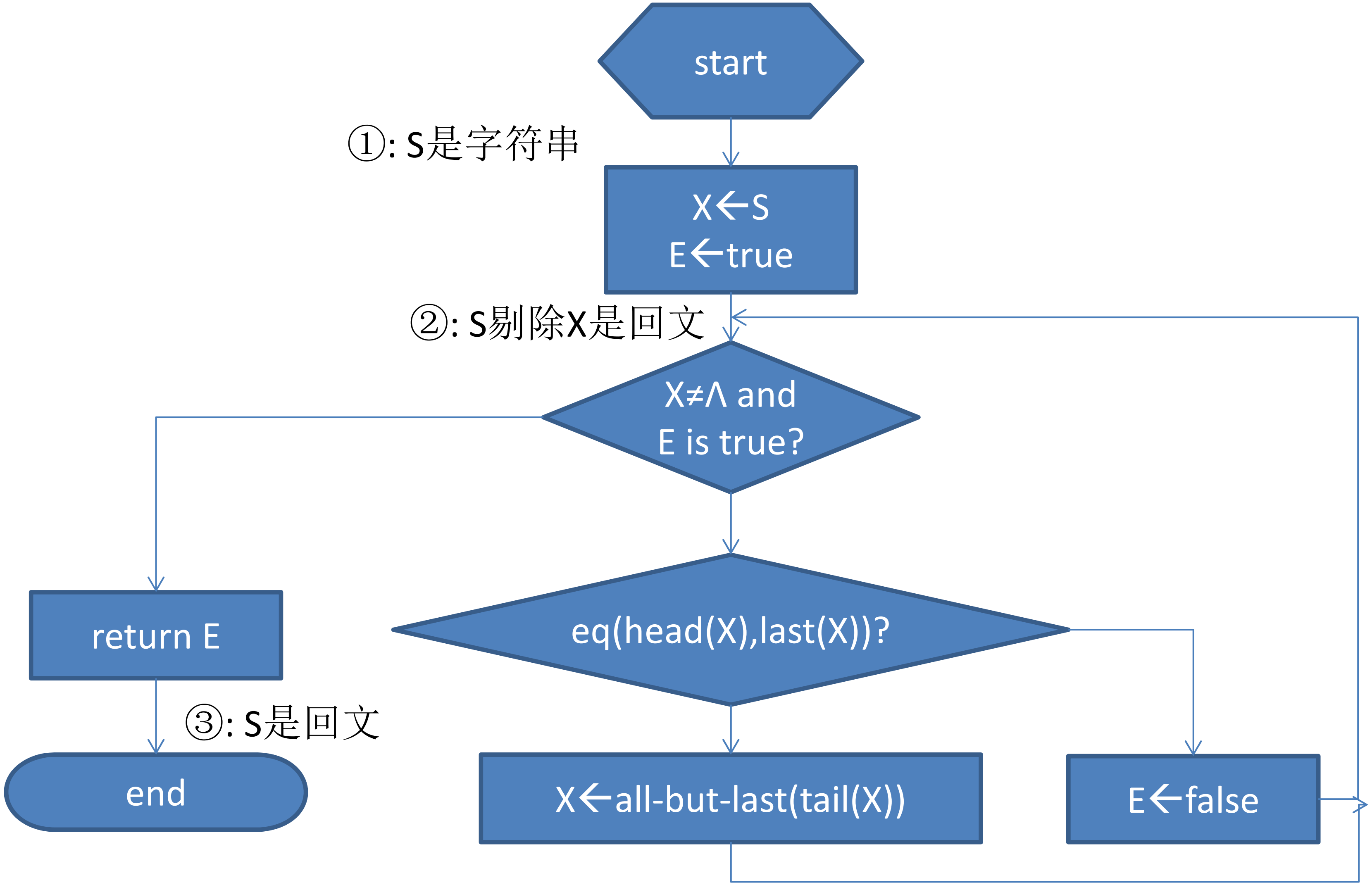
- 如何证明算法是totally correct？
  – partially correct + termination

举例：回文检测算法



start
X←S
E←true
X≠Λ and
E is true?
N
Y
return E
end
eq(head(X),last(X))?
N
Y
X←all-but-last(tail(X))
E←false

举例：回文检测算法


start
①: S是字符串
X←S
E←true
②: S剔除X是回文
X≠Λ and
E is true?
return E
③: S是回文
end
eq(head(X),last(X))?
X←all-but-last(tail(X))
E←false

问题3：算法的效率分析

- 分析算法的效率时，为什么要先定义计算模型？
- Random-Access Machine有哪些要素？

问题3：算法的效率分析

- 分析算法的效率时，为什么要先定义计算模型？
- Random-Access Machine有哪些要素？
  - 数据
    - 支持的类型
    - 存储的方式
  - 指令
    - 支持的类型
    - 执行的方式

举例：回文检测算法

```
PALINDROME-TEST (S)
1.    X=S
2.    E=true
3.    while X≠Λ and E=true
4.       if eq(head(X),last(X))=true
5.          X=all-but-last(tail(X))
6.       else
7.          E=false
8.    return E
```

- input size是什么？
- 如何计算它的running time？
- best/worst/average case分别是多少？

举例：回文检测算法

PALINDROME-TEST (S)	cost	times
1. X=S	c_1	1
2. E=true	c_2	1
3. while X≠Λ and E=true	c_3	p
4. if eq(head(X),last(X))=true	c_4	p-1
5. X=all-but-last(tail(X))	c_5	q
6. else	c_6	p-1-q
7. E=false	c_7	p-1-q
8. return E	c_8	1

- input size是什么？
- 如何计算它的running time？
- best/worst/average case分别是多少？

$$running\ time = c_1 + c_2 + c_3 \cdot p + c_4 \cdot (p-1) + c_5 \cdot q + c_6 \cdot (p-1-q) + c_7 \cdot (p-1-q) + c_8$$

举例：回文检测算法

PALINDROME-TEST (S)	cost	times
1. X=S	c_1	1
2. E=true	c_2	1
3. while X≠Λ and E=true	c_3	p
4. if eq(head(X),last(X))=true	c_4	p-1
5. X=all-but-last(tail(X))	c_5	q
6. else	c_6	p-1-q
7. E=false	c_7	p-1-q
8. return E	c_8	1

- input size是什么？
- 如何计算它的running time？
- best/worst/average case分别是多少？

$$running\ time = c_1 + c_2 + c_3 \cdot p + c_4 \cdot (p-1) + c_5 \cdot q + c_6 \cdot (p-1-q) + c_7 \cdot (p-1-q) + c_8$$

best case: $c_1 + c_2 + c_3 \cdot 2 + c_4 \cdot 1 + c_5 \cdot 0 + c_6 \cdot 1 + c_7 \cdot 1 + c_8$

worst case: $c_1 + c_2 + c_3 \cdot \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right) + c_4 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c_5 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c_6 \cdot 0 + c_7 \cdot 0 + c_8$

average case?

问题3：算法的效率分析 (续)

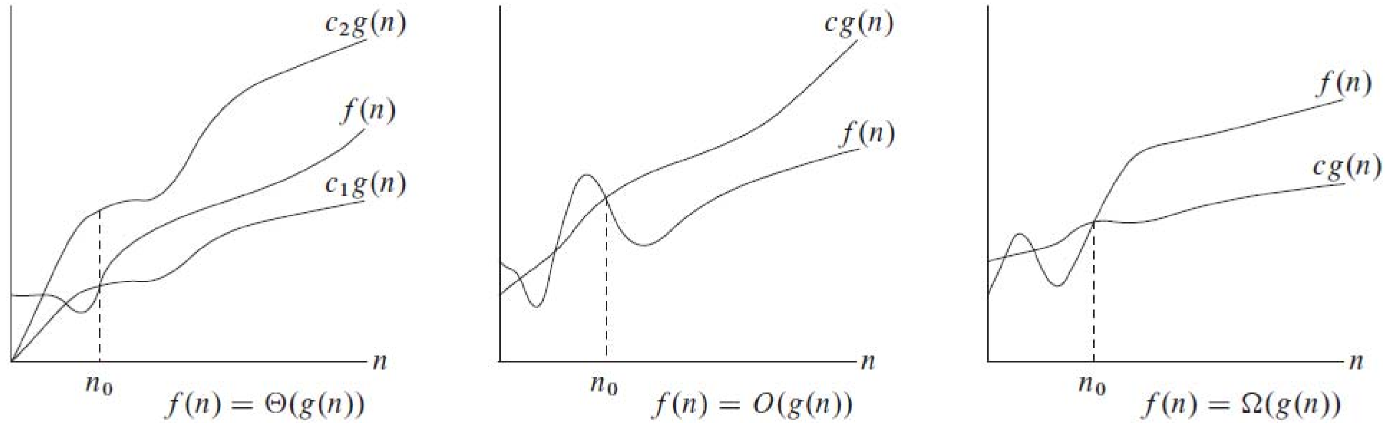
- 为什么我们通常最关注worst case？

问题3：算法的效率分析 (续)

- 为什么我们通常最关注worst case？
  - Gives us an upper bound on the running time for any input.
  - Occurs fairly often.
  - The “average case” is often roughly as bad as the worst case.

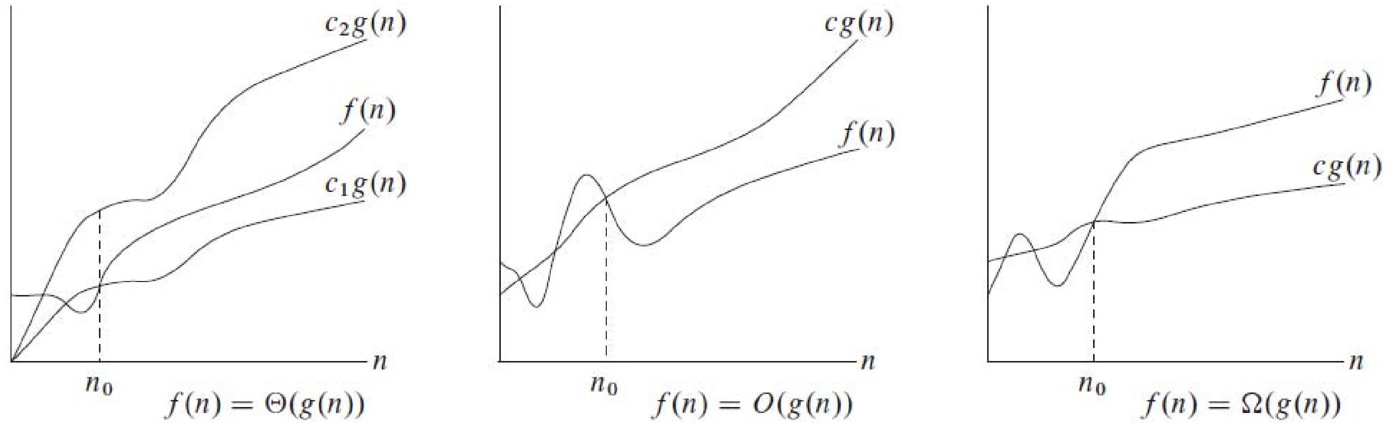
问题4：算法效率的渐进表示法

- Θ, O和Ω的数学本质是什么？
  - 例如，$\Theta(n^2)$在数学上是一个什么？
- 你能严格说出Θ(g(n)), O(g(n))和Ω(g(n))的数学定义吗？



问题4：算法效率的渐进表示法

- Θ, O和Ω的数学本质是什么？
  - 例如，$\Theta(n^2)$在数学上是一个什么？
- 你能严格说出Θ(g(n)), O(g(n))和Ω(g(n))的数学定义吗？



$\Theta(g(n)) = \{f(n) :$ there exist positive constants c_1, c_2, and n_0 such that $0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$ for all $n \ge n_0\}$.[1]

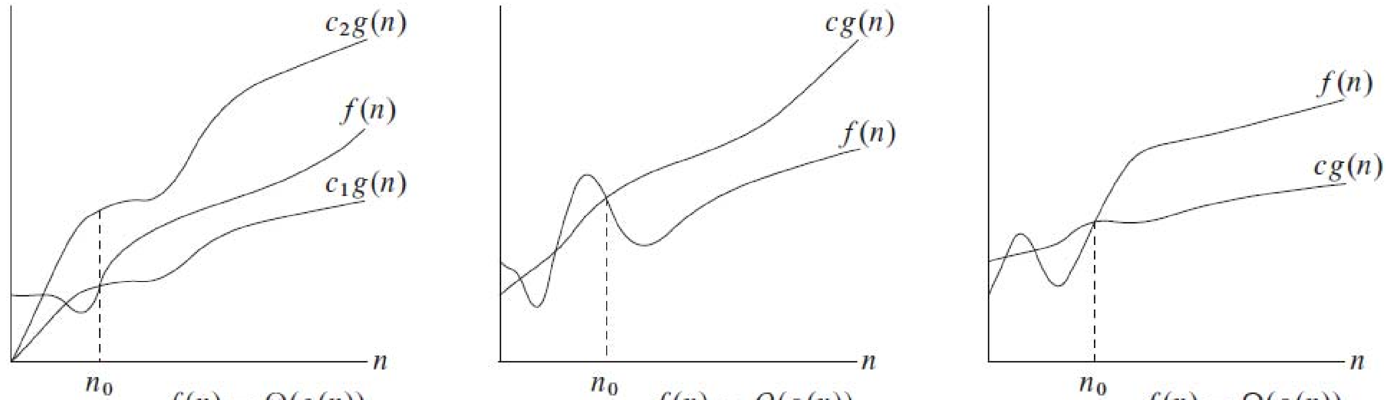
$O(g(n)) = \{f(n) :$ there exist positive constants c and n_0 such that $0 \le f(n) \le cg(n)$ for all $n \ge n_0\}$.

$\Omega(g(n)) = \{f(n) :$ there exist positive constants c and n_0 such that $0 \le cg(n) \le f(n)$ for all $n \ge n_0\}$.

有没有觉得似曾相识？
你能改写成更简洁的形式吗？

问题4：算法效率的渐进表示法 (续)

- Θ, O和Ω的数学本质是什么？
  - 例如，$\Theta(n^2)$在数学上是一个什么？
- 你能严格说出Θ(g(n)), O(g(n))和Ω(g(n))的数学定义吗？



$f(n) = \Theta(g(n))$　　$f(n) = O(g(n))$　　$f(n) = \Omega(g(n))$

$\Theta(g(n)) = \{f(n) :$ there exist positive constants c_1, c_2, and n_0 such that $0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$ for all $n \ge n_0\}$.[1]

$O(g(n)) = \{f(n) :$ there exist positive constants c and n_0 such that $0 \le f(n) \le cg(n)$ for all $n \ge n_0\}$.

$\Omega(g(n)) = \{f(n) :$ there exist positive constants c and n_0 such that $0 \le cg(n) \le f(n)$ for all $n \ge n_0\}$.

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = c \in (0,\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} > 0$$

问题4：算法效率的渐进表示法 (续)

- 你能用Θ来表示它们的running time吗？

best case: $c_1 + c_2 + c_3 \cdot 2 + c_4 \cdot 1 + c_5 \cdot 0 + c_6 \cdot 1 + c_7 \cdot 1 + c_8$

worst case: $c_1 + c_2 + c_3 \cdot \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right) + c_4 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c_5 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c_6 \cdot 0 + c_7 \cdot 0 + c_8$

- 你能不能证明$\Theta(n^2)=\Theta(an^2+bn+c)$？
- 尽管严格来说是$bn+c \in \Theta(n)$，但有时候也写成$bn+c=\Theta(n)$，因此$an^2+bn+c=an^2+\Theta(n)$，这种写法有什么好处？

- 如果改用O而不是Θ，优缺点分别是什么？

问题4：算法效率的渐进表示法 (续)

- O和o在数学上的区别是什么？

- 你是如何理解这个比喻的？

$$
\begin{aligned}
f(n) &= O(g(n)) && \text{is like} \quad a \le b\,, \\
f(n) &= \Omega(g(n)) && \text{is like} \quad a \ge b\,, \\
f(n) &= \Theta(g(n)) && \text{is like} \quad a = b\,, \\
f(n) &= o(g(n)) && \text{is like} \quad a < b\,, \\
f(n) &= \omega(g(n)) && \text{is like} \quad a > b\,.
\end{aligned}
$$

问题4：算法效率的渐进表示法 (续)

- O和o在数学上的区别是什么？

$O(g(n)) = \{f(n) :$ there exist positive constants c and n_0 such that $0 \le f(n) \le cg(n)$ for all $n \ge n_0\}$.

$o(g(n)) = \{f(n) :$ for any positive constant $c > 0$, there exists a constant $n_0 > 0$ such that $0 \le f(n) < cg(n)$ for all $n \ge n_0\}$.

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

- 你是如何理解这个比喻的？

$f(n) = O(g(n))$ is like $a \le b$,

$f(n) = \Omega(g(n))$ is like $a \ge b$,

$f(n) = \Theta(g(n))$ is like $a = b$,

$f(n) = o(g(n))$ is like $a < b$,

$f(n) = \omega(g(n))$ is like $a > b$.