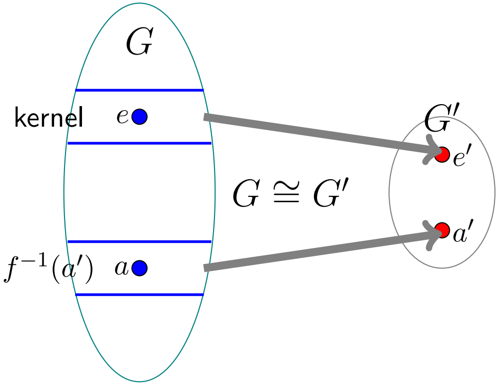
Open Topic
同构猜想

Pu Liang

Nanjing University, Department of Computer Science and Technology

March 24, 2021



请证明或证否下列猜想

- Kernel 和任意的 G' 中非单位元元素的逆像不相交
- Kernel 和任意的 G' 中非单位元元素的逆像同势
- 任意的 G' 中元素的逆像不相交且同势
- 任意的 G' 中元素的逆像必定是 kernel 的某个陪集

Kernel 和任意的 G' 中非单位元元素的逆像不相交

加强命题，直接证明原命题第三条要求证明的

任意的 G' 中两个不同元素的逆像不相交

Kernel 和任意的 G' 中非单位元元素的逆像不相交

加强命题，直接证明原命题第三条要求证明的

任意的 G' 中两个不同元素的逆像不相交

反证法：假设元素 a'、b' 的逆像相交，即 $f^{-1}(a') \cap f^{-1}(b') = c$
$\because c \in f^{-1}(a'), \therefore f(c) = a'$
$\because c \in f^{-1}(b'), \therefore f(c) = b'$
由于 f 是良定义的，推出矛盾，命题得证

任意的 G' 中元素的逆像必定是 kernel 的某个陪集

取 G' 中任一元素 h', 设 $f^{-1}(h') = H \subset G$, 任取 $h \in H$, 要证明
$H = h \cdot kerf$

任意的 G' 中元素的逆像必定是 kernel 的某个陪集

取 G' 中任一元素 h', 设 $f^{-1}(h') = H \subset G$, 任取 $h \in H$, 要证明 $H = h \cdot kerf$

首先证明 $h \cdot kerf \subseteq H$

任意的 G' 中元素的逆像必定是 kernel 的某个陪集

取 G' 中任一元素 h', 设 $f^{-1}(h') = H \subset G$, 任取 $h \in H$, 要证明 $H = h \cdot kerf$

首先证明 $h \cdot kerf \subseteq H$

$\forall k \in kerf, f(h \cdot k) = f(h)f(k) = f(h) = h'$
即 $\forall t \in h \cdot kerf, f(t) = h' \Rightarrow t \in H \Rightarrow h \cdot kerf \subseteq H$

任意的 G' 中元素的逆像必定是 kernel 的某个陪集

取 G' 中任一元素 h', 设 $f^{-1}(h') = H \subset G$, 任取 $h \in H$, 要证明 $H = h \cdot kerf$

首先证明 $h \cdot kerf \subseteq H$

$\forall k \in kerf, f(h \cdot k) = f(h)f(k) = f(h) = h'$
即 $\forall t \in h \cdot kerf, f(t) = h' \Rightarrow t \in H \Rightarrow h \cdot kerf \subseteq H$

其次证明 $H \subseteq h \cdot kerf$

任意的 G' 中元素的逆像必定是 kernel 的某个陪集

取 G' 中任一元素 h', 设 $f^{-1}(h') = H \subset G$, 任取 $h \in H$, 要证明
$H = h \cdot kerf$

首先证明 $h \cdot kerf \subseteq H$

$\forall k \in kerf, f(h \cdot k) = f(h)f(k) = f(h) = h'$
即 $\forall t \in h \cdot kerf, f(t) = h' \Rightarrow t \in H \Rightarrow h \cdot kerf \subseteq H$

其次证明 $H \subseteq h \cdot kerf$

任取 $h_0 \in H$, 要证明 $h_0 \in h \cdot kerf$
$h_0 = (hh^{-1})h_0 = h(h^{-1}h_0)$
$f(h^{-1}h_0) = f(h^{-1})f(h_0) = f(h)^{-1}f(h_0) = h'^{-1}h' = e$, 故 $h^{-1}h_0 \in kerf$
故 $h_0 = h(h^{-1}h_0) \in h \cdot kerf$
$\Rightarrow H \subseteq h \cdot kerf$

Kernel 和任意的 G' 中非单位元元素的逆像同势

因为已经证明了任意的 G' 中元素的逆像必定是 kernel 的某个陪集，由于子群的陪集和该子群同势，故得证

任意的 G' 中元素的逆像不相交且同势

在第一条的证明中已证明不相交，又由于上一条证明逆像都和 kernel 同势，故任意两个不同元素的逆像都是同势的.

感谢聆听！