- 教材讨论
  - TJ第3、4、5、6章

问题1：群、子群、循环群

- 什么是群？
  整数上的加法构成群吗？为什么？
  一个非空集合的幂集上的并运算构成群吗？为什么？

问题1：群、子群、循环群

- 什么是群？
  整数上的加法构成群吗？为什么？
  一个非空集合的幂集上的并运算构成群吗？为什么？
- 什么是阿贝尔群？
  整数加法群是阿贝尔群吗？为什么？
- 什么是子群？
  你能找出整数加法群的一些子群吗？
- 如何证明一个群的某个子集是子群？

- The law of composition is ***associative***. That is,

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

  for $a, b, c \in G$.

- There exists an element $e \in G$, called the ***identity element***, such that for any element $a \in G$

$$e \circ a = a \circ e = a.$$

- For each element $a \in G$, there exists an ***inverse element*** in G, denoted by a^{-1}, such that

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

Proposition 3.30 *A subset H of G is a subgroup if and only if it satisfies the following conditions.*

1. *The identity e of G is in H.*
2. *If $h_1, h_2 \in H$, then $h_1 h_2 \in H$.*
3. *If $h \in H$, then $h^{-1} \in H$.*

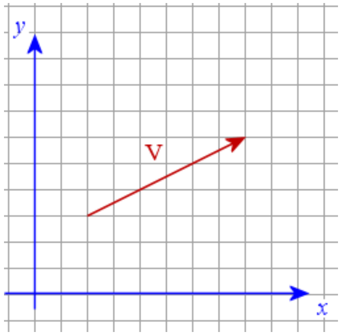
Proposition 3.31 *Let H be a subset of a group G. Then H is a subgroup of G if and only if $H \neq \emptyset$, and whenever $g, h \in H$ then gh^{-1} is in H.*

问题1：群、子群、循环群

- 什么是群？
  整数上的加法构成群吗？为什么？
  一个非空集合的幂集上的并运算构成群吗？为什么？
- 什么是阿贝尔群？
  整数加法群是阿贝尔群吗？为什么？
- 什么是子群？
  你能找出整数加法群的一些子群吗？
- 如何证明一个群的某个子集是子群？
- 什么是循环群、生成元、元素的阶？
  整数加法群是循环群吗？
  如果是，生成元是什么？生成元唯一吗？

问题1：群、子群、循环群(续)

- 在二维平面上的“移动”，例如：向东偏北30度移动9公里
- 你能以这些“移动”为元素构建一个群吗？
  - 它的集合元素和运算分别是什么？
  - 它为什么符合群的定义？
  - 它是阿贝尔群吗？为什么？



  - 你能找出它的一些子群吗？并说明为什么找到的是子群
  - 它是循环群吗？
    如果是，生成元是什么？生成元唯一吗？
    如果不是，如何改造出一个循环群？
  - 你能找出这个（改造后的）循环群的一些子群吗？
    它们是循环群吗？

问题2：置换群

- 什么是置换？
  什么是置换群？
- 什么是轮换？
  如何将一个置换转为一组轮换？ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
- 什么是对换？
  如何将一个轮换转为一组对换？

问题2：置换群

- 什么是置换？
  什么是置换群？
- 什么是轮换？
  如何将一个置换转为一组轮换？ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
- 什么是对换？ $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1 a_n)(a_1 a_{n-1}) \cdots (a_1 a_3)(a_1 a_2)$
  如何将一个轮换转为一组对换？

问题2：置换群

- 什么是置换？
  什么是置换群？
- 什么是轮换？
  如何将一个置换转为一组轮换？ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
- 什么是对换？ $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1 a_n)(a_1 a_{n-1}) \cdots (a_1 a_3)(a_1 a_2)$
  如何将一个轮换转为一组对换？
- 包含至少两个元素的有限集合上的置换，
  一定可以表示为一组对换，为什么？

问题2：置换群 (续)

- 我们请五位同学到讲台上进行真人演示
  - 按身高排成一行
    你能将他们的位置交换表示为一个置换群吗？
  - 请演示一个长为3的轮换
  - 请通过一组对换返回刚才的位置
  - 请通过另一组对换返回刚才的位置
  - 请演示一个对换，与刚才的那些对换不相交

问题3：陪集

- 什么是陪集？
- 你理解拉格朗日定理及其推论了吗？它们为什么成立？

Theorem 6.10 **(Lagrange)** *Let G be a finite group and let H be a subgroup of G. Then $|G|/|H| = [G:H]$ is the number of distinct left cosets of H in G. In particular, the number of elements in H must divide the number of elements in G.*

Corollary 6.11 *Suppose that G is a finite group and $g \in G$. Then the order of g must divide the number of elements in G.*

Corollary 6.12 *Let $|G| = p$ with p a prime number. Then G is cyclic and any $g \in G$ such that $g \neq e$ is a generator.*

问题4：综合运用

- 你能将魔方表示为一个置换群吗？
- 其中包含轮换和对换吗？

- 你能找出它的一些循环子群吗？
  你能找出它的一些非循环子群吗？
- 你能找出其中一个子群的陪集吗？