

- 教材讨论
– GC第7章

问题1：有向图的基本概念

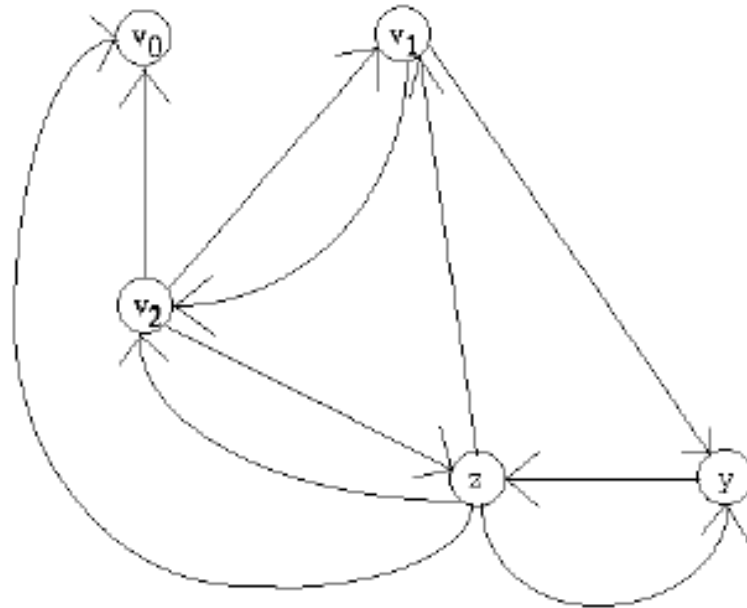
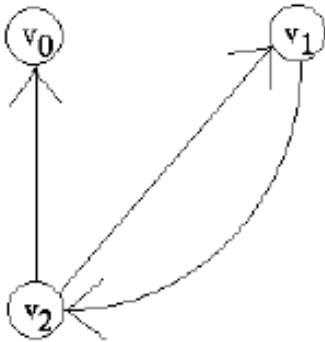
- 你能举出有向图在实际生活中的至少4个例子吗？
- 与无向图相比，这些概念在有向图中发生了怎样的变化？
 - edge、degree
 - (closed) walk、(closed) trail、path/cycle、distance
 - connectivity

问题2：有向图的度

- 有向图中，所有顶点的入度和等于出度和吗？
- 简单有向图中，顶点的出度有可能两两互不相同吗？
在此基础上，顶点的入度有可能却都相同吗？
如果有可能，你能造出多少个这样的图？

问题2：有向图的度

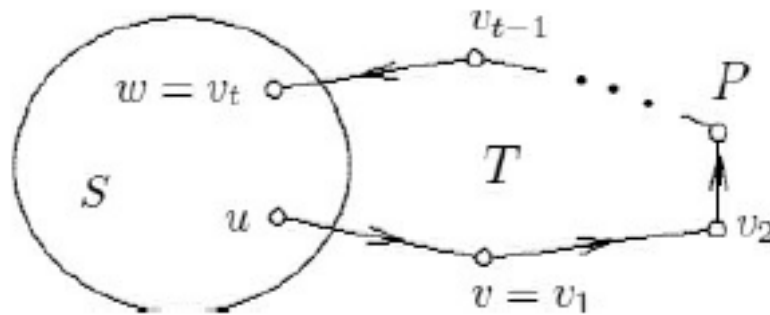
- 有向图中，所有顶点的入度和等于出度和吗？
- 简单有向图中，顶点的出度有可能两两互不相同吗？在此基础上，顶点的入度有可能却都相同吗？如果有可能，你能造出多少个这样的图？



问题3：图的定向

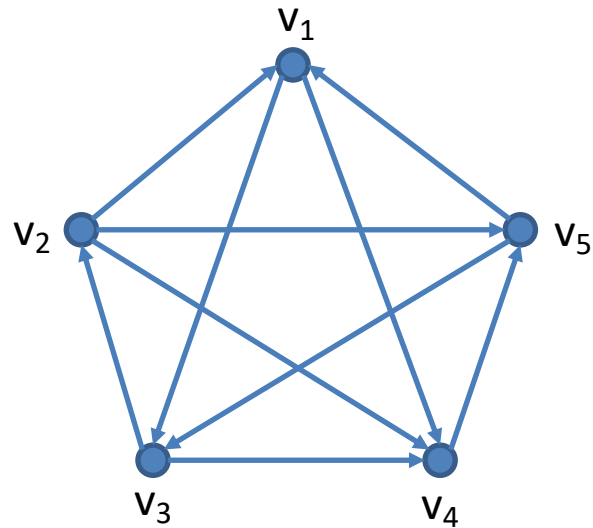
- 什么是定向(orientation)和底图(underlying graph)?
- 你能结合这个图简要证明强定向的充要条件吗?

Theorem 7.5 *A nontrivial connected graph G has a strong orientation if and only if G contains no bridges.*



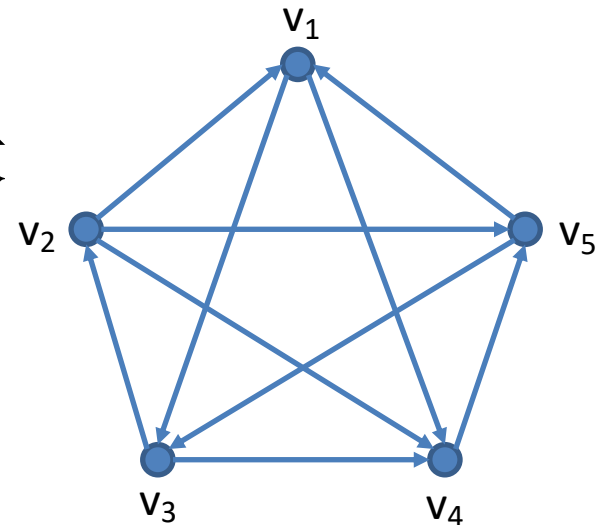
问题4：竞赛图

- 什么是竞赛图？
- 你能想到哪些方法来确定竞赛的胜者？



问题4: 竞赛图 (续)

- 竞赛图中的王(king)
 - 到其它任何顶点都有长不超过2的有向路
- 王唯一吗?
- 王的充分条件 (暨存在性) : 出度最大
 - 你能证明吗?
 - 这同时也是必要条件吗?



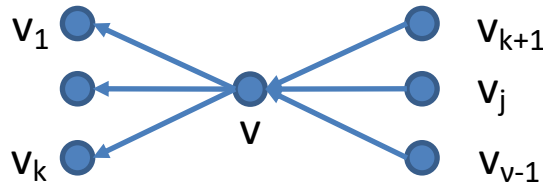
问题4：竞赛图 (续)

- 竞赛图中出度最大的顶点必为王。

证明：

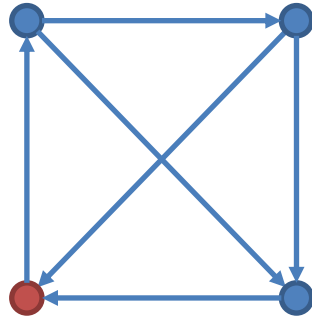
设 v 是出度最大的顶点。

- 如果 $d^+(v)=v-1$ ：显然成立。
- 如果 $d^+(v)<v-1$ ，设 v 的出邻点为 v_1, \dots, v_k ，入邻点为 v_{k+1}, \dots, v_{v-1}
 - 对于 v_{k+1}, \dots, v_{v-1} 中的每个 v_j ：
 $d^+(v_j) \leq d^+(v) \Rightarrow v_1, \dots, v_k$ 不可能都是 v_j 的出邻点（为什么？）
 \Rightarrow 其中某个是 v_j 的入邻点 \Rightarrow 从 v 到 v_j 有长为2的有向路 \Rightarrow 得证



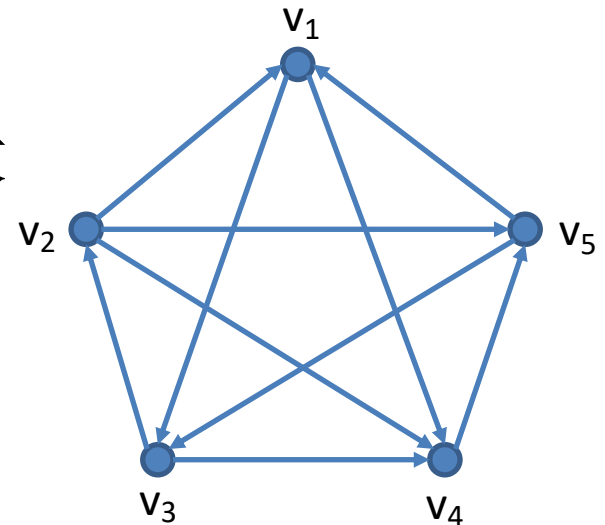
问题4：竞赛图 (续)

- 竞赛图中出度非最大的顶点也可能为王。



问题4：竞赛图 (续)

- 竞赛图中的王(king)
 - 到其它任何顶点都有长不超过2的有向路
- 王唯一吗？
- 王的充分条件（暨存在性）：出度最大
 - 你能证明吗？
 - 这同时也是必要条件吗？
- 你能为王的唯一性找一个充要条件吗？



问题4: 竞赛图 (续)

- 竞赛图中一个顶点 v 是唯一的王当且仅当 v 的出度为 $v-1$ 。

证明:

\Rightarrow : 反证法

1. 假设唯一的王 v 满足 $d^+(v) < v-1 \Rightarrow v$ 的所有入邻点导出的子竞赛图有自己的王 u

2. u 到 v 有弧 $\Rightarrow u$ 到 v 的出邻点有长为2的有向路

$\Rightarrow u$ 也是原图的王 $\Rightarrow v$ 不是唯一的王 \Rightarrow 矛盾

\Leftarrow : $d^+(v) = v-1 \Rightarrow v$ 是王且无入邻点 $\Rightarrow v$ 是唯一的王

