

- 作业讲解

- UD第6章问题7、16、17

- UD第7章问题1、8、9、10、11

- UD第8章问题1、4、7、8、9、11

- UD第9章问题2、4、12、13、14、16

UD第6章

- 关于集合的两个小问题
 - set difference的表示：是“\”，不是“/”
 - 如何证明“真子集”关系(proper subset)?

UD第7章问题9a

- 如何证明两个集合不相交？
 - 定义法：是否需要正反各证一遍？
 - $\forall x \in A \setminus B \dots$
 - $\forall x \in B \dots$
 - 反证法

UD第7章问题11

- 反例
 - 假设: $X=\{1,2\}$, $A=\{1\}\subseteq X$, $B=\{2\}\subseteq X$, $Y=\Phi\subseteq X$
 - 则: $A\cap Y=B\cap Y=\Phi$, 但 $A\neq B$
- 这个反例对吗?

UD第8章问题4

- 数学归纳法

$$\because \bigcap_{n=1}^k A_n \subset \bigcap_{n=1}^k B_n$$

$$\text{且 } A_{k+1} \subset B_{k+1}$$

$$\therefore A_{k+1} \cap \bigcap_{n=1}^k A_n \subset B_{k+1} \cap \bigcap_{n=1}^k B_n$$

$$\text{即 } \bigcap_{n=1}^{k+1} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{k+1} B_n$$

- 这个证明正确吗？

UD第8章问题7a

- 用数学语言来书写证明过程

$$\because \exists \alpha_0 \in I, (A_{\alpha_0} = \emptyset)$$

$$\therefore \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} = A_{\alpha_0} \cap \bigcap_{\alpha \in (I \setminus \{\alpha_0\})} A_{\alpha} = \emptyset \cap \bigcap_{\alpha \in (I \setminus \{\alpha_0\})} A_{\alpha} = \emptyset$$

UD第8章问题11f

- 反证法

假设 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$

则 $\exists x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$

则对于 $\alpha, \beta \in I, A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$

与题设不符

得证

- 这个证明正确吗？

UD第9章问题4

- 不要混淆 \in 和 \subseteq

$$(1) \forall x \in P(A)$$

$$\text{则 } x \subseteq A \subseteq B$$

$$\therefore x \in P(B)$$

$$\therefore P(A) \subseteq P(B)$$

$$(2) \because A \in P(A) \subseteq P(B)$$

$$\therefore A \subseteq B$$

UD第9章问题12a

- 自顶向下分解问题
 1. if and only if的分解
 2. 集合相等的分解

UD第9章问题13

$\because \forall (x, y) \in A \times B \subseteq C \times D$

$\therefore x \in C$ 且 $y \in D$

$\because x, y$ 是分别从 A, B 中任取的

$\therefore A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$

- 这个证明正确吗？

UD第9章问题16a

- If $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, then $a=x$ and $b=y$.

$$\therefore \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

$$\therefore \{a\} = \{x\}, \{a, b\} = \{x, y\}$$

$\therefore \dots$

- 这个证明正确吗？

UD第9章问题16c

$$\forall x \in A \times B$$

$$\text{则} \exists a \in A, b \in B, (a, b) = x, x \in P(P(A \cup B))$$

$$\because A \subseteq C, B \subseteq D$$

$$\therefore a \in C, b \in D, x \in P(P(C \cup D))$$

$$\therefore x \in C \times D$$

- 教材答疑和讨论
 - UD第14、15、16章

问题1：函数的基本概念

- 你理解这些基本概念了吗？
 - 定义域 (domain)
 - 陪域 (codomain)
 - 值域 (range)

 - 单射 (injective/one-to-one)
 - 满射 (surjective/onto)
 - 双射 (bijective)
- 你能从日常生活中举出函数的例子吗？它们的定义域/陪域/值域分别是什么？
 - 非单射、非满射
 - 单射、非满射
 - 满射、非单射
 - 双射

问题1：函数的基本概念 (续)

- 什么叫做函数相等？包括哪几个方面？

问题1: 函数的基本概念 (续)

- 什么叫做函数相等? 包括哪几个方面?
- Two functions $f:A \rightarrow B$ and $g:A \rightarrow B$ are equal if and only if $f(x)=g(x)$ for all $x \in A = \text{dom}(f) = \text{dom}(g)$.
 - 定义域相同
 - 陪域相同
 - 关系相同

问题2：函数基本概念的求解与证明

- 结合**Example 13.7**，你能说出求解函数值域的一般步骤吗？
- 你能运用这组步骤来严谨地求解以下函数的值域吗？

The function $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = 1/x$.

问题2：函数基本概念的求解与证明(续)

- 如何证明一个函数是单射？
- 如何证明一个函数是满射？
- 如何证明一个函数是双射？
- 你能严谨地证明以下函数是双射吗？
 - The function $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ defined by $f(x) = (x+1)/(x-1)$

问题3：函数的复合

- 你能简要证明这些定理吗？
 - If f and g are one-to-one, then $g \circ f$ is one-to-one.
 - If $g \circ f$ is one-to-one, then f one-to-one. (而 g 未必)
 - If f and g are onto, then $g \circ f$ is onto.
 - If $g \circ f$ is onto, then g is onto. (而 f 未必)

问题3：函数的复合

- 你能简要证明这些定理吗？
 - If f and g are one-to-one, then $g \circ f$ is one-to-one.
 - If $g \circ f$ is one-to-one, then f one-to-one. (而 g 未必)
 - If f and g are onto, then $g \circ f$ is onto.
 - If $g \circ f$ is onto, then g is onto. (而 f 未必)
- 你能从日常生活中举出函数复合的例子吗？
 - f 单射、 g 单射
 - f 单射、 g 非单射、 $g \circ f$ 单射
 - f 满射、 g 满射
 - f 非满射、 g 满射、 $g \circ f$ 满射
 - f 双射、 g 双射

问题4：反函数

- 什么是反函数？
- 如何求解反函数？
你能严谨地求解以下函数的反函数吗？
 - The function $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ defined by $f(x) = (x+1)/(x-1)$

问题4：反函数

- 什么是反函数？

Let $f : A \rightarrow B$ be a bijective function. The **inverse** of f is the function $f^{-1} : B \rightarrow A$ defined by

$$f^{-1}(y) = x \text{ if and only if } f(x) = y.$$

- 如何求解反函数？

你能严谨地求解以下函数的反函数吗？

- The function $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ defined by
 $f(x) = (x+1)/(x-1)$

问题4: 反函数 (续)

- 除了定义, 还有什么证明手段?
- 你能用它来重新证明吗?
 - The function $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ defined by $f(x) = (x+1)/(x-1)$

问题4：反函数 (续)

- 除了定义，还有什么证明手段？

Let $f : A \rightarrow B$ be a bijective function. Then

If $g : B \rightarrow A$ is a function satisfying $f \circ g = i_B$ or $g \circ f = i_A$, then $g = f^{-1}$.

- 你能用它来重新证明吗？
 - The function $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ defined by $f(x) = (x+1)/(x-1)$

问题4：反函数 (续)

- 除了这个定理之外

Let $f : A \rightarrow B$ be a bijective function. Then

If $g : B \rightarrow A$ is a function satisfying $f \circ g = i_B$ or $g \circ f = i_A$, then $g = f^{-1}$.

- 书上还给出了另一个很相似的定理

Let $f : A \rightarrow B$ and $g : B \rightarrow C$ be functions.

Suppose now that $f : A \rightarrow B$ and $g : B \rightarrow A$. If $f \circ g = i_B$ and $g \circ f = i_A$, then $g = f^{-1}$.

- 你能看出它们的区别和联系吗？

问题5：函数的像

- 对于 $f:X \rightarrow Y$ 和 $x \in X, y \in Y$
 - $f(x)$ 和 $f(\{x\})$ 有什么区别？
 - $f^{-1}(y)$ 和 $f^{-1}(\{y\})$ 有什么区别？

问题5：函数的像 (续)

- 以下这些定理都成立吗？
如果成立，你能给出证明吗？
如果不成立，你能举出反例吗？

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

问题5：函数的像 (续)

- $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

这个证明错在哪儿？

Not a proof. It follows from Theorem 17.5 that $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. To show the reverse set inclusion, we let $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. By definition of intersection, $y \in f(A_1)$ and $y \in f(A_2)$. Therefore, $y = f(x)$ for some x in A_1 and $y = f(x)$ for some $x \in A_2$. Since $x \in A_1$ and $x \in A_2$, we see that $x \in A_1 \cap A_2$. Thus $y = f(x)$ where $x \in A_1 \cap A_2$, so $y \in f(A_1 \cap A_2)$. This proves that $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$, and the nonfact is established! \square

问题5：函数的像 (续)

- 你能不能用图示的方式解释为什么以下这些定理都是不成立的？

$$f(f^{-1}(C)) = C;$$

$$f^{-1}(f(A)) = A;$$

$$f(A) = f(B) \text{ implies that } A = B;$$

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(D) \text{ implies that } C = D.$$