计算机问题求解--论题1-12--偏序关系和格

2015年12-17

偏序关系

- 问题1：查词典时，单词的“序”起到了什么作用？单词的“序”是怎么定义的？
  - 字母表中字母的序关系；积序关系；词典序关系

- 问题2：任意两个单词都可以比较“序”，是否意味着单词的“序位置”是唯一的？
  - 如何证明？

全序：一种特殊的偏序关系

- 如果对$a, b \in A$，$a \preccurlyeq b$和$b \preccurlyeq a$中有一个成立，则a,b可比。
- 设R是A上的偏序关系，如果A中的任意两个元素都是可比的，则称R是A上的全序关系（或线序关系）
- 举例（全序）
  - 实数集上的“不大于”关系≤、基于拉丁字母表的字典顺序

偏序集上的“小于”关系及覆盖

- 设<A, $\preccurlyeq$> 是偏序集
- A上的“小于”关系$\prec$定义如下：

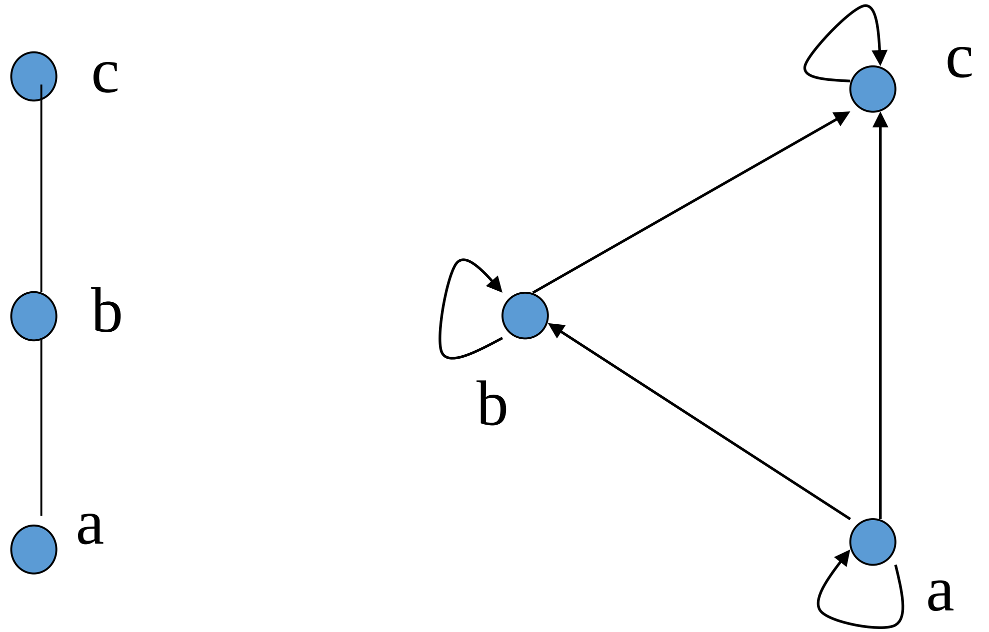
$$x \prec y \text{ iff } x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$$

- 元素y覆盖x定义如下：

$$x \prec y\text{，且不存在}z \in A\text{使得}x \prec z \prec y$$

哈斯图

- 下图中的关系图和哈斯图是等价的吗？

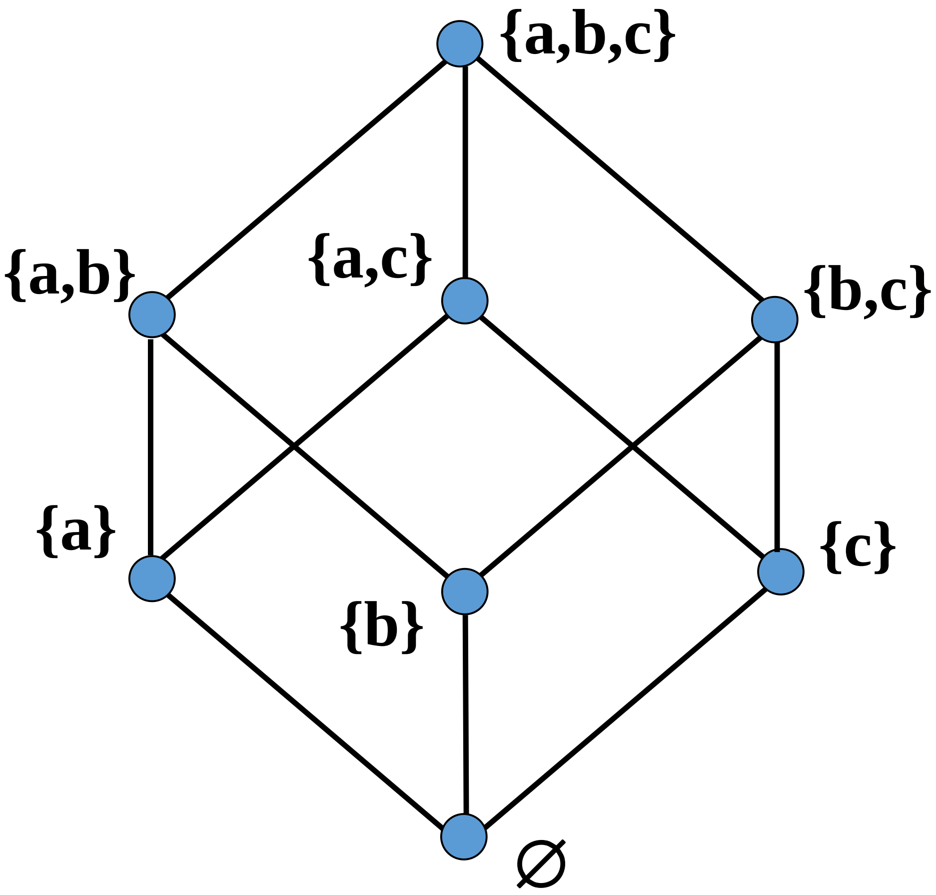


问题3：你能够较为正式（形式化）地阐述“一个哈斯图能够而且仅仅能够表示一个偏序关系”吗？

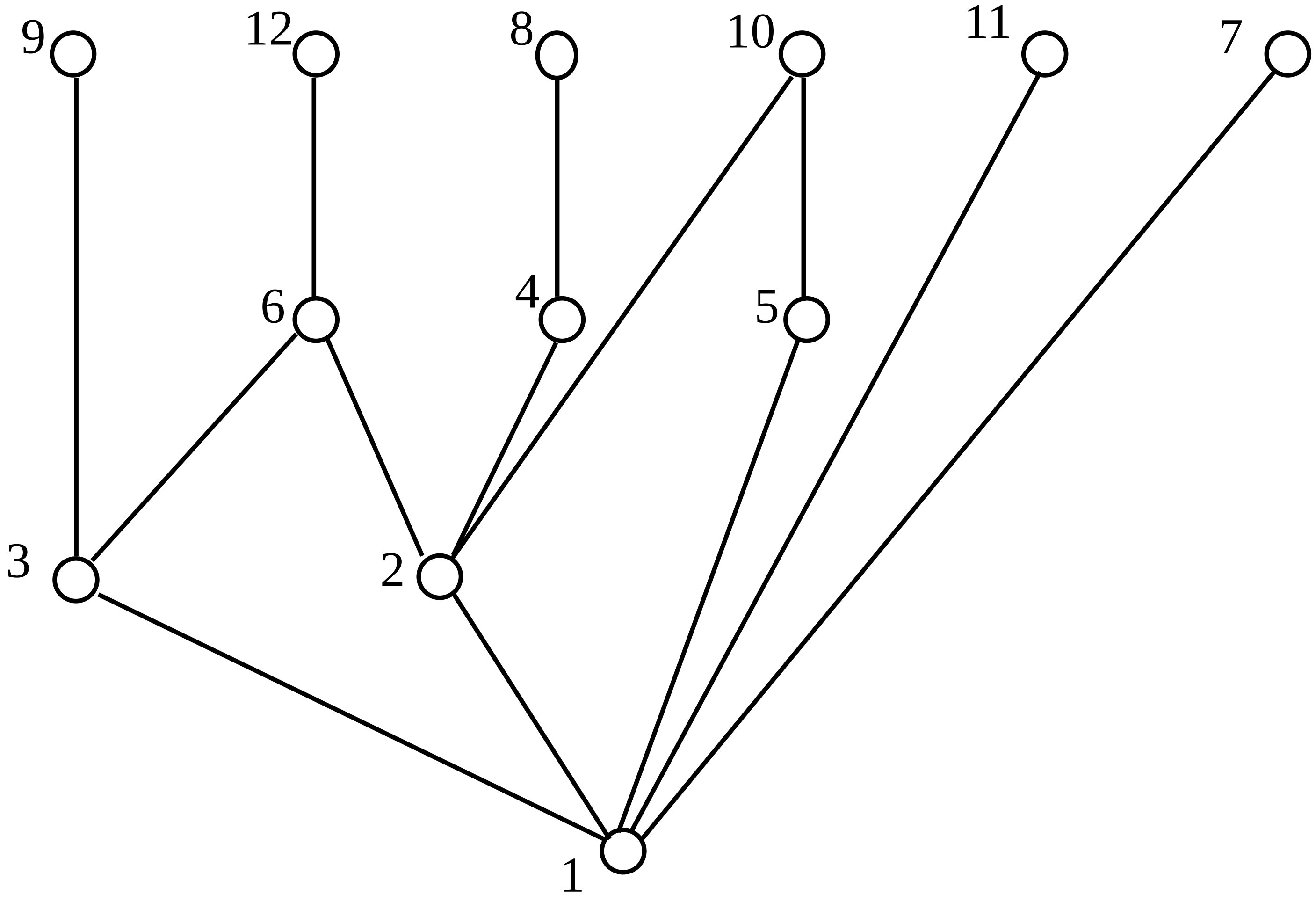
Suppose S is a finite partially ordered set. Then the order on S is completely known once we know all pairs a, b in S such that $a \ll b$, that is, once we know the relation $\ll$ on S. This follows from the fact that $x < y$ if and only if $x \ll y$ or there exist elements $a_1, a_2, \ldots, a_m$ in S such that

$$x \ll a_1 \ll a_2 \ll \cdots \ll a_m \ll y$$

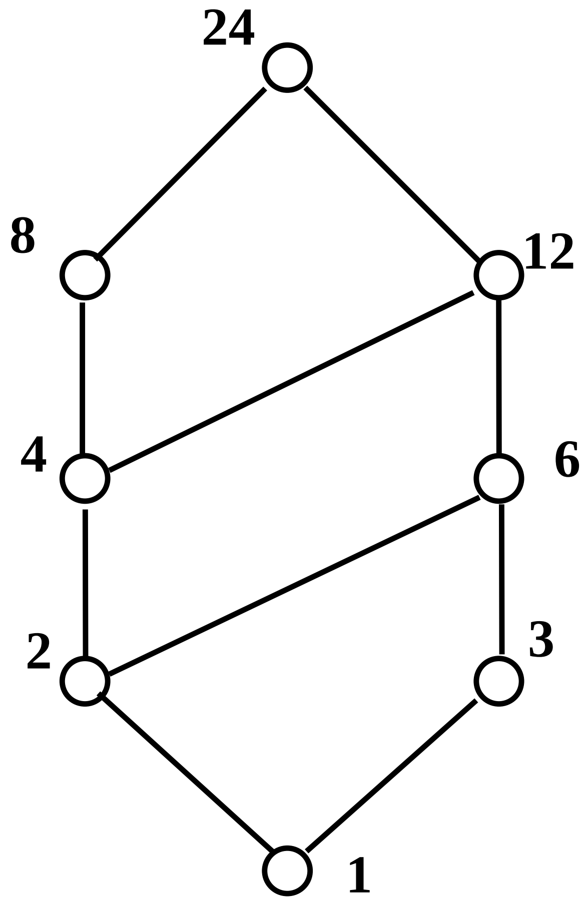
ρ({a,b,c})上的包含关系



{1,2,...,12}上的整除关系



{1,2,3,4,6,8,12,24}上的整除关系



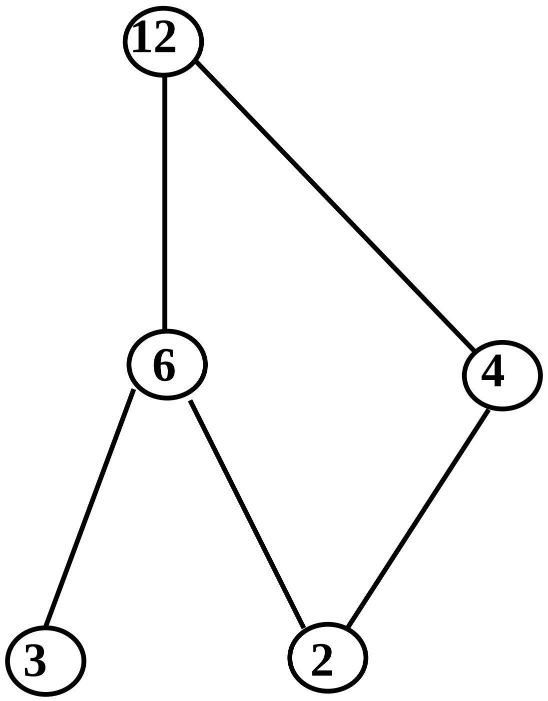
偏序集中的特殊元素： 极大(小)

- **x是偏序集$\langle A,\preccurlyeq\rangle$中的极大元 iff.**
  - 对任意$y\in A$,若$x\preccurlyeq y$, 则$x=y$
- **x是偏序集$\langle A,\preccurlyeq\rangle$中的极小元 iff.**
  - 对任意$y\in A$,若$y\preccurlyeq x$, 则$x=y$
- 有关极大元与极小元的讨论
  - 有穷集合一定有极大(小)元 没有比它更小(大)的了!
  - 不一定唯一
  - 一个元素可能兼为极大(小)元

偏序集中的特殊元素： 最大(小)

- **x是偏序集$<A, \preccurlyeq>$中的最大元 iff.**
  - 对任意$y \in A$, $y \preccurlyeq x$
- **x是偏序集$<A, \preccurlyeq>$中的最小元 iff.**
  - 对任意$y \in A$, $x \preccurlyeq y$
- 有关最大元与最小元的讨论
  - 最大(小)元最多只有一个
  - 可能不存在。

它比谁都要小(大)!

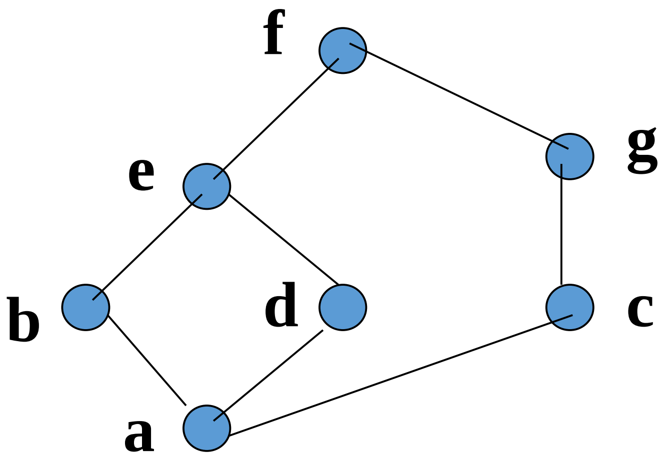


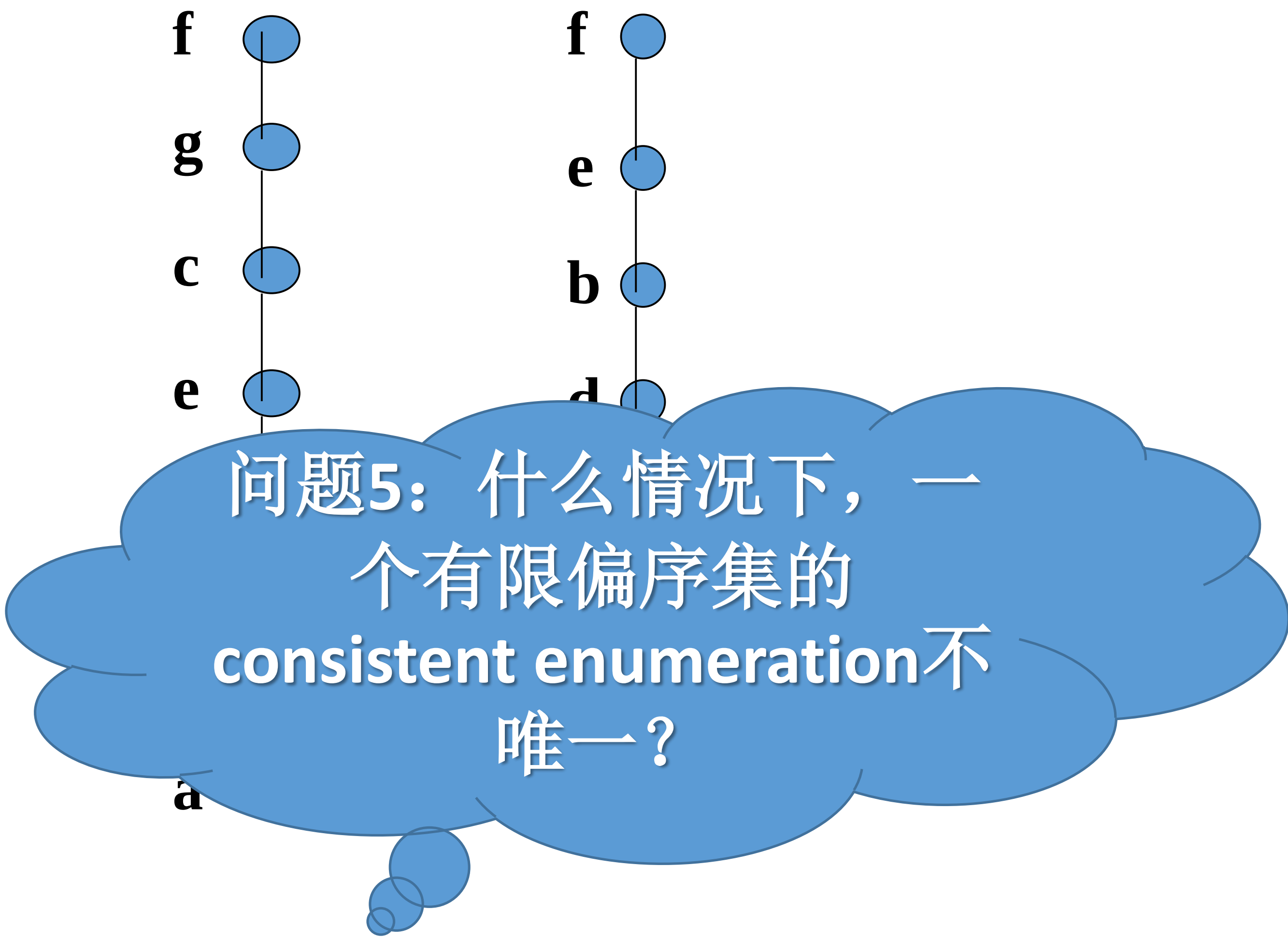
问题4：如何证明这个定理？

Theorem 14.1: There exists a consistent enumeration for any finite poset A.

Topological sorting（拓扑排序）

哈斯图上构造一种线性序

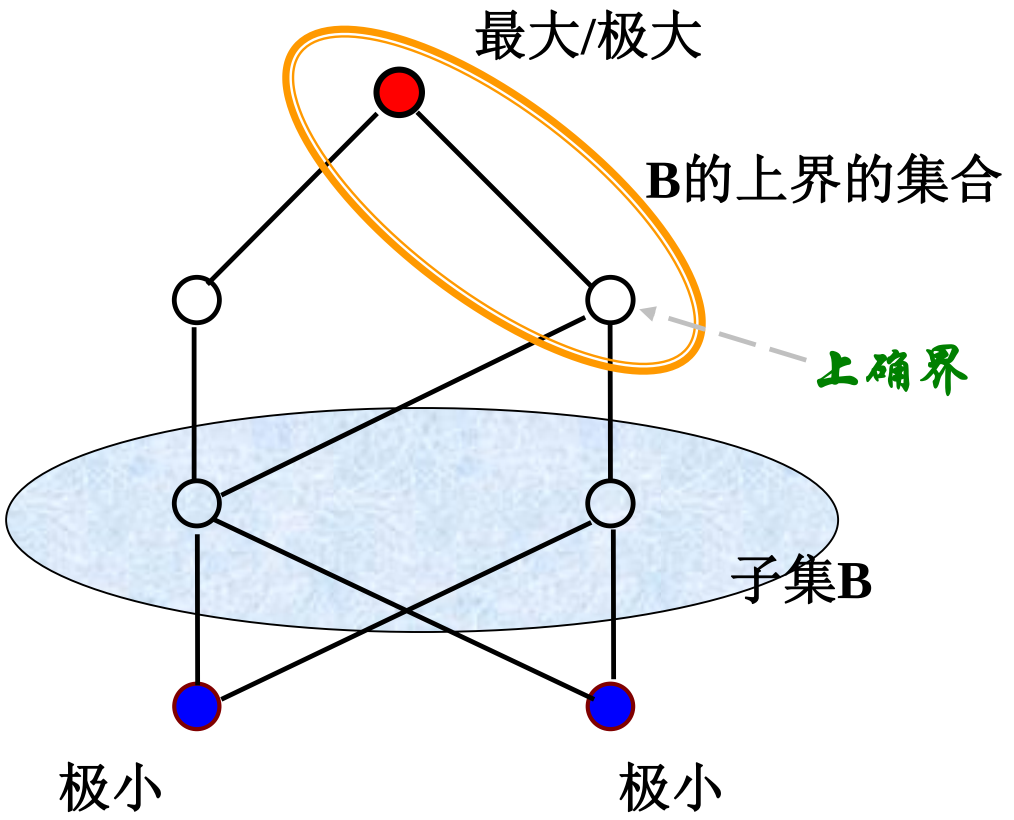




偏序集中的特殊元素 ： 上(下)确界

- 上界：对于偏序集<A,≼>和A的子集B，若存在$y \in A$，对B中任意元素x, 均有$x \preccurlyeq y$,则y是B的上界。
- 上确界：如果B的上界构成的偏序集有最小元，则该最小元为B的上确界。
- 类似地可以定义*下(确)界*。
- 有关上(下)界的讨论
  - 不一定存在
  - 上(下)界不一定唯一，但上(下)确界若存在，必唯一。注意：上(下)确界即某个偏序集的最小(大)元。

从哈斯图看特殊元素



良序

- 定义：给定集合A上的偏序≼，若A的任一非空子集均存在最小元素，则该偏序为良序。
- 良序必为全序
  - 对任意$a,b \in A$, $\{a,b\}$必有最小元，则a,b一定可比
- 实际上，“反对称性+任一非空子集存在最小元”就能够保证全序性质（偏序性质+任何两个元素均可比）。
  - 自反性：对任意$a \in A$, $\{a\}$也必有最小元，即$a \preccurlyeq a$
  - 传递性：假设$a \preccurlyeq b$, $b \preccurlyeq c$, $\{a, b, c\}$的最小元素只能是a, 因此$a \preccurlyeq c$
  - 任何两个元素可比上面已证明。

关于次序关系的进一步讨论

- 注意： 良序结构上可以实施数学归纳法
- 全序是否一定是良序？
- 当A是无穷集合时，全序不一定是良序
  - 例如： $<\mathbf{R}, \leq>$, 任何开区间上没有最小元素
- 良序 $\rightarrow$全序 $\rightarrow$偏序
- 偏序/全序/良序的逆关系是否仍为偏序/全序/良序？
- 良序的逆关系不一定是良序
  - 例如$<\mathbf{N}, \leq>$

问题6： 你从Transfinite Induction中能想到什么？

Principle of Transfinite Induction: Let A be a subset of a well-ordered set S with the following two properties:

(i) $a_0 \in A$.
(ii) If $s(a) \subseteq A$, then $a \in A$.

Then $A = S$.

偏序格

- **定义：**
  - 〈S, ≼〉是偏序集
  - ∀x,y∈S, 存在{x,y}的最小上界**lub{x,y}**
  - ∀x,y∈S, 存在{x,y}的最大下界**glb{x,y}**

  - 则称S关于≼构成*格*。

lub： least upper bound

glb： greatest lower bound

在格中定义运算

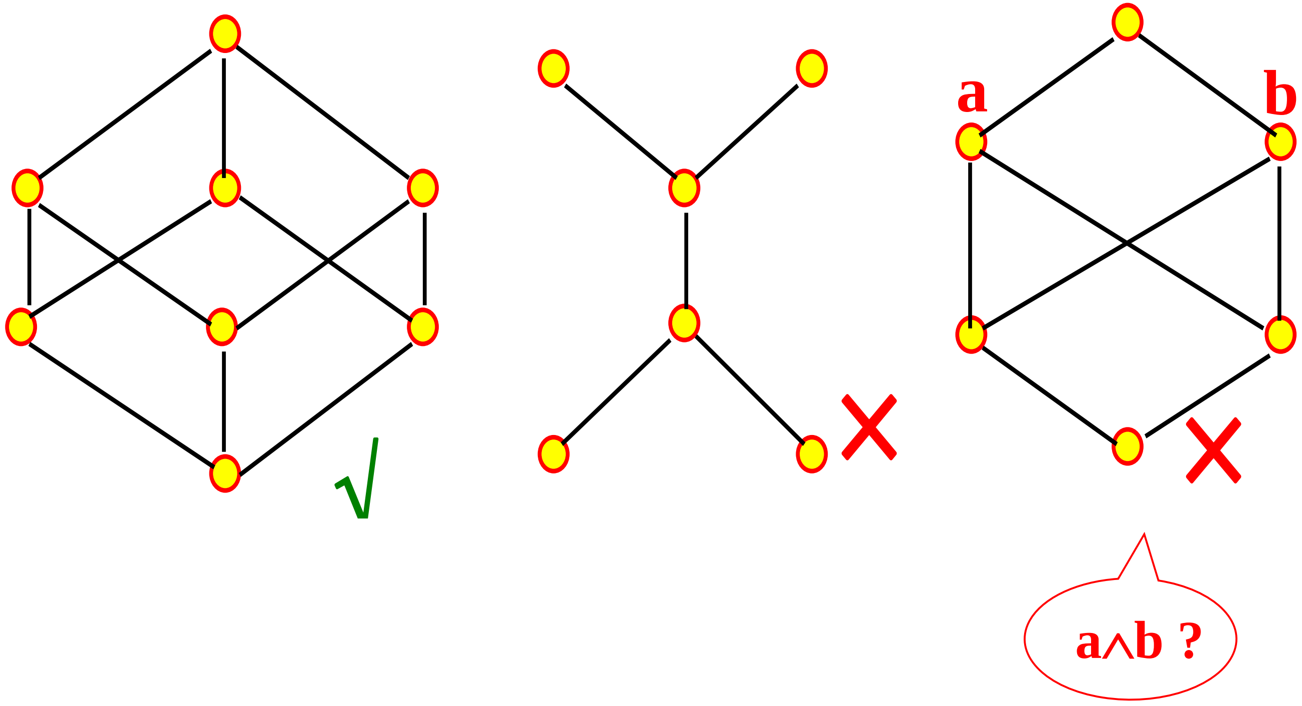
- **在格中可以定义如下的运算：**
  - **“保联”：** $\forall x,y \in S$, $x \vee y = \mathrm{lub}\{x,y\}$
  - **“保交”：** $\forall x,y \in S$, $x \wedge y = \mathrm{glb}\{x,y\}$

偏序格的例子

- $\langle\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}, |\rangle$
  - $x \wedge y = \gcd(x,y)$ 最大公因子
  - $x \vee y = \mathrm{lcm}(x,y)$ 最小公倍数
- $\langle \rho(B), \subseteq \rangle$
  - $x \wedge y = x \cap y$
  - $x \vee y = x \cup y$
- 〈整数集，$\leq$〉
  - $x \wedge y = \min\{x,y\}$
  - $x \vee y = \max\{x,y\}$

格与哈斯图

- 右边两个哈斯图所表示的偏序集*不是*格



格的基本关系式

- 根据“最小上界”和“最大下界”的定义，有如下关系式:
  - $a \leqslant a \vee b$, $b \leqslant a \vee b$
  - 如果$a \leqslant c$, $b \leqslant c$, 则$a \vee b \leqslant c$
  - $a \wedge b \leqslant a$, $a \wedge b \leqslant b$
  - 如果$c \leqslant a$, $c \leqslant b$, 则$c \leqslant a \wedge b$

问题7：以下定义和偏序格的定义是等价的。Why？

Axioms Defining a Lattice

Let L be a nonempty set closed under two binary operations called *meet* and *join*, denoted respectively by $\wedge$ and $\vee$. Then L is called *lattice* if the following axioms hold where a, b, c are elements in L:

[L₁] Commutative law:

(1a) $a \wedge b = b \wedge a$ (1b) $a \vee b = b \vee a$

[L₂] Associative law:

(2a) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (2b) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

[L₃] Absorption law:

(3a) $a \wedge (a \vee b) = a$ (3b) $a \vee (a \wedge b) = a$

We will sometimes denote the lattice by $(L, \wedge, \vee)$ when we want to show which operations are involved.

问题8：问题第七个问题的钥匙在于以下定义，这又是why？

Lattices and Order

Given a lattice L, we can define a partial order on L as follows:

$$a \precsim b \quad \text{if} \quad a \wedge b = a$$

Analogously, we could define

$$a \precsim b \quad \text{if} \quad a \vee b = b$$

Open tutorial：

Theorem 14.5: Let P be a poset such that the $\inf(a, b)$ and $\sup(a, b)$ exist for any a, b in P. Letting

$$a \wedge b = \inf(a, b) \quad \text{and} \quad a \vee b = \sup(a, b)$$

we have that $(P, \wedge, \vee)$ is a lattice. Furthermore, the partial order on P induced by the lattice is the same as the original partial order on P.

谁能告诉大家，我们从两个角度定义了同一个数学概念：格

格的同构

Two lattices L and L' are said to be *isomorphic* if there is a one-to-one correspondence $f: L \to L'$ such that

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \quad \text{and} \quad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$$

for any elements a, b in L.

问题9：我们定义两个被观察的系统（对象）是否具有同构特性，是为了什么？具有上述特性的两个系统，为什么取名叫isomorphic?

关于格的对偶命题

- 对偶命题的例子(a, b是格中元素)
  - $a \wedge b \preccurlyeq a$和$a \vee b \succcurlyeq a$互为对偶命题
- 对偶命题构成规律
  - 格元素名不变
  - $\preccurlyeq$与$\succcurlyeq$，$\wedge$与$\vee$全部互换。

格的对偶原理

- 如果命题P对一切格为真，则P的对偶命题P^*也对一切格为真。
- 证明：假设P对任意格为真，要证P^*对任意格为真。
  - 设〈S, ≼〉是任意给定的一个格。
  - 定义S上的二元关系≼*：
    - $\forall a,b \in S$, $a \preccurlyeq^* b \Leftrightarrow b \preccurlyeq a$
  - 易证〈S, ≼*〉也是格。
    - $\forall a,b \in S$, $a \wedge^* b = a \vee b$, $a \vee^* b = a \wedge b$
    - 这里$a \wedge^* b$, $a \vee^* b$分别是a,b关于偏序≼*的最大下界和最小上界。
  - 因此，P在〈S, ≼*〉中为真。也即P^*在〈S, ≼〉中为真。

格的性质

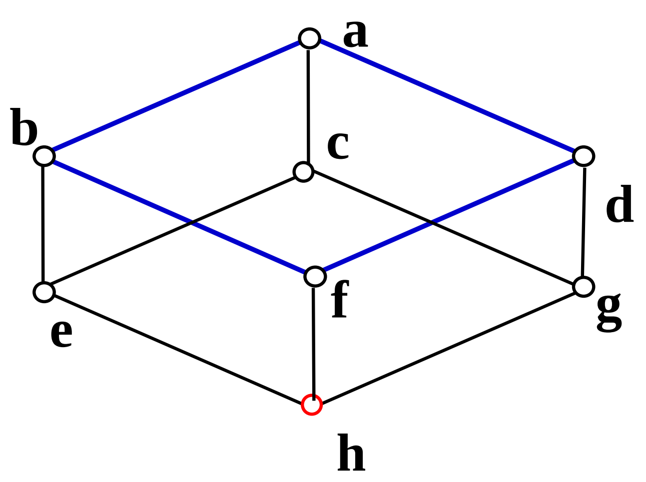
- 若〈S, $\preccurlyeq$〉是格，则：$\forall a,b\in S$:

$$a\preccurlyeq b \Leftrightarrow a\wedge b=a \Leftrightarrow a\vee b=b$$

  - 采用循环证明：
  - $a\preccurlyeq b \Rightarrow a\wedge b=a$：由下界定义：$a\wedge b\preccurlyeq a$，而$a\preccurlyeq a$，$a\preccurlyeq b$，由最大下界定义：$a\preccurlyeq a\wedge b$，$\therefore a\wedge b=a$
  - $a\wedge b=a \Rightarrow a\vee b=b$: 由上界定义：$b\preccurlyeq a\vee b$，而由$a\wedge b\preccurlyeq b$和$a\wedge b=a$可知：$a\preccurlyeq b$，又$b\preccurlyeq b$，由最小上界定义可知：$a\vee b\preccurlyeq b$，$\therefore a\vee b=b$
  - $a\vee b=b \Rightarrow a\preccurlyeq b$: $a\preccurlyeq a\vee b$，而$a\vee b=b$，$\therefore a\preccurlyeq b$

子格

- 设〈L, ∧, ∨〉是格，S是L的非空子集，若S关于L中的运算∧和∨仍构成格，则称S是L的子格。
  - 上述定义等价于：L在运算∧和∨下封闭。
- 例子：格L如右图所示
  - 令S_1={a,b,d,h}, S_2={a,b,d,f}
  - 则S_2是子格, 但S_1不是($b \wedge d \notin S_1$)
  - 注意：S_1构成偏序格



几个格的例子

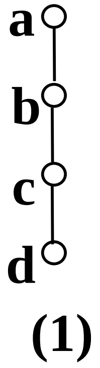
(1) 链

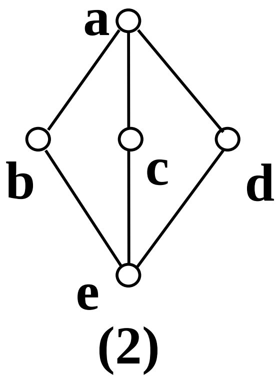
(2) 钻石格

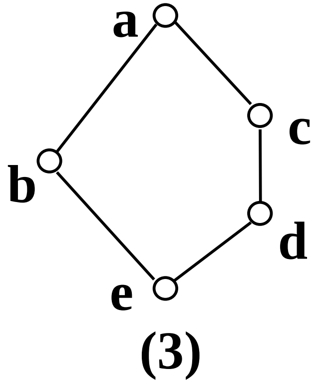
- **注意：$b \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$ （都为a）**

(3) 五角格

- **注意：$d \wedge (c \vee b) \neq c \vee (b \wedge d)$ （ $d \preccurlyeq c$， $d \neq c$）**







分配格（ distributive lattice）

- **定义：设L是格，若对任意的a,b,c$\in$L,**

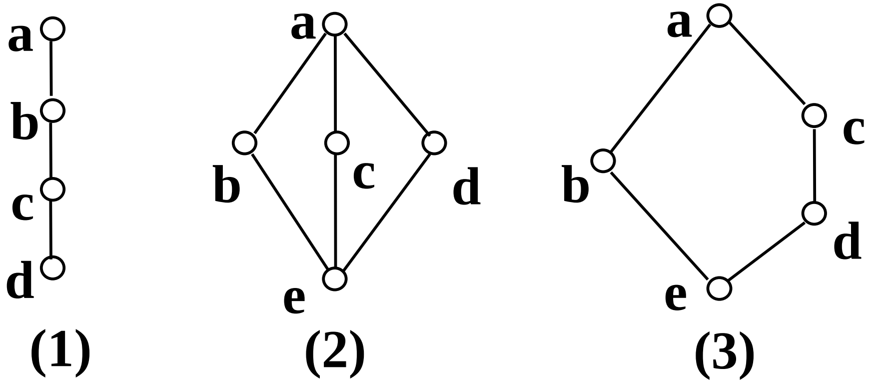
  $$a \vee (b \wedge c)=(a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

  则L是分配格。

  - **注意：对偶式 $a \wedge (b \vee c)=(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ （对偶原理）**
  - **钻石格(2)和五角格(3)均非分配格。**
    - **在(2)中，$b \wedge (c \vee d)=b$,**

      而$(b \wedge c) \vee (b \wedge d)=e$
    - **在(3)中，$d \vee (b \wedge c)=d$,**

      而$(d \vee b) \wedge (d \vee c)=c$



分配格的充分必要条件之一

- **格L是分配格 ⇔ L不含与五角格同构的子格，也不含与钻石格同构的子格。**

分配格的充分必要条件之二

- 格L是分配格 $\Leftrightarrow$ $\forall$a, b, c$\in$L, 有:

  $a \wedge c=b \wedge c$ 且 $a \vee c=b \vee c \Rightarrow a=b$

- 证明:
  - $\Rightarrow$ 若L是分配格，假设$a\wedge c = b\wedge c$ 且 $a \vee c=b \vee c$，则:

    $a = a \vee(a \wedge c) = a \vee(b \wedge c) = (a \vee b) \wedge(a \vee c)$

    $b = b \vee(b \wedge c) =b \vee(a \wedge c) = (b \vee a) \wedge (b \vee c)$

  - $\Leftarrow$ 假设L不是分配格。

    若L含有同构于钻石格的子格L'，设其最大元是v, 最小元是u, 其它元素是x,y,z, 则$x\wedge y=z\wedge y$, $x\vee y=z\vee y$, 但$x\neq z$。

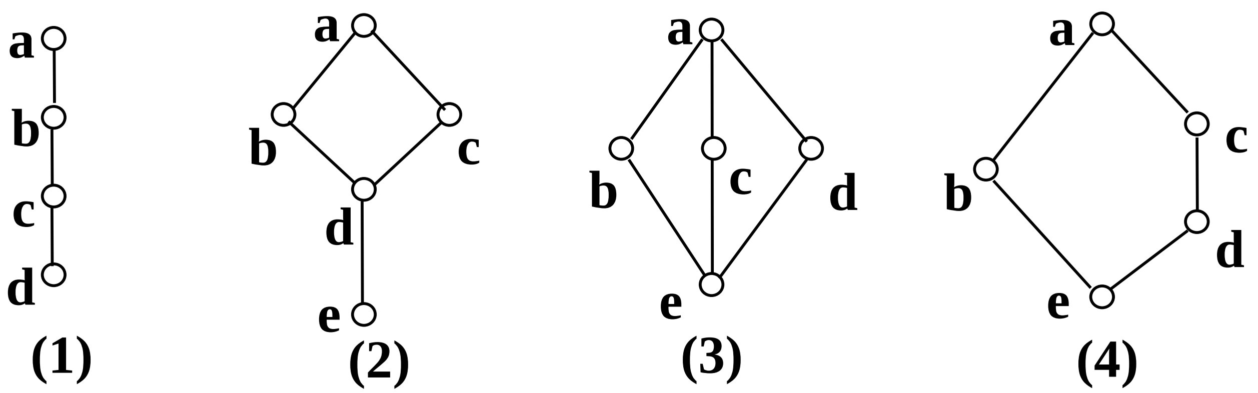
    若L同构于五角格，设其最大元是v, 最小元是u, 其它元素是x,y,z, 且$x\prec y$, 则$x \wedge z=y \wedge z$, $x \vee z=y \vee z$, 但$x\neq y$。

有界格

- **定义：设L是格，若∃a∈L, 满足：∀x∈L, a≼x, 同时，∃b∈L, 满足：∀x∈L, x≼b, 则称L为*有界格*。**
  - **注意：上述a即L的最小元素，称为*全下界*，通常记为*0*；b即L的最大元素，称为*全上界*，通常记为*1*。**
  - **注意：在对偶式中0, 1互换。**
- **任何有限格均是有界格：全上界是$a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$，全下界是$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$。**
- **设L是有界格，则：**
  - 全上界是关于∧运算的单位元，关于∨运算的零元
  - 全下界是关于∧运算的零元，关于 ∨运算的单位元

有补格

- 在有界格中可以定义补元：设〈L, ∧, ∨, 0, 1〉是有界格。a是L中一给定元素。若存在b∈L, 同时满足：a∨b =1, a∧b =0, 则称b是a的补元。
  - 0和1互为补元。
  - 一个格中，可以是部分元素有补元的，补元不一定唯一。



- 每个元素均有补元的格称为有补格。

有界分配格补元的唯一性

- 若L是有界分配格，对任意$a \in L$, 若a有补元，则其补元是唯一的。
  - 假设b和c均是a的补元，则：

    $a \vee b=1, a \vee b=0; a \vee c=1, a \wedge c=0$

    即：$a \vee b=a \vee c, a \wedge b=a \wedge c$

    ∵L是分配格，∴$b=c$

    (分配格的充分必要条件之二)

作业

- 14.32
- 14.44
- 14.46
- 14.58
- 14.62
- 14.66
- 14.70
- 14.75

格导出的代数系统

- 若〈S, ≼〉是格，则称〈S, ∧, ∨〉为格S导出的代数系统。
- 易证〈S, ∧, ∨〉满足下列性质：
  - 交换律：$a\wedge b=b\wedge a,\ a\vee b=b\vee a$
    - $\because a\wedge b\preccurlyeq b,\ a\wedge b\preccurlyeq a,\ \therefore a\wedge b\preccurlyeq b\wedge a$, 同理可得$b\wedge a\preccurlyeq a\wedge b$
  - 结合律：$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c),\ (a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$
    - 注意：$(a\wedge b)\wedge c\preccurlyeq a\wedge b\preccurlyeq a,\ (a\wedge b)\wedge c\preccurlyeq a\wedge b\preccurlyeq b$, 还有$(a\wedge b)\wedge c\preccurlyeq c$
  - 等幂律：$a\wedge a=a,\ a\vee a=a$
    - 由偏序的自反性：$a\preccurlyeq a$且$a\preccurlyeq a$, $\therefore a\preccurlyeq a\wedge a$, 当然还有$a\wedge a\preccurlyeq a$
  - 吸收律：$a\wedge(a\vee b)=a,\ a\vee(a\wedge b)=a$
    - 由$a\preccurlyeq a$和$a\preccurlyeq a\vee b$可得：$a\preccurlyeq a\wedge(a\vee b)$，当然还有$a\wedge(a\vee b)\preccurlyeq a$

代数格

- 定义：设〈L, *, ◦〉是代数系统，其中*, ◦是二元运算，且满足交换律、结合律、吸收律，则称〈L, *, ◦〉是(代数)格。
- 代数格满足等幂律：即$\forall a \in L$, $a*a=a$, $a \circ a=a$
  - 根据吸收律：$a=(a \circ (a*a))$
  - $a*a=a*(a \circ (\underline{a*a}))=a$ //再次使用吸收律
- $a \circ b=b \Leftrightarrow a*b=a$
  - $\Rightarrow$ 若$a \circ b=b$, 则$a*b=a*(a \circ b)=a$
  - $\Leftarrow$ 若$a*b=a$, 则$a \circ b=(a*b) \circ b=b \circ (b*a)=b$

在代数格中定义偏序关系

- 设〈L, *, ∘〉是代数格，定义L上的关系R如下：

$$\forall a, b \in L,\ aRb \Leftrightarrow a \circ b = b$$

则R是偏序。

- 自反性：∘满足等幂律
- 反对称性：若aRb, bRa, 则$a \circ b = b$, $b \circ a = a$,
  根据交换律，$a \circ b = b \circ a$, 所以$a = b$
- 传递性：若aRb, bRc, 即$a \circ b = b$, $b \circ c = c$,
  $a \circ c = a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ //根据结合律
  $= b \circ c = c$，所以aRc

$a \circ b$即{a,b}的最小上界

- **$a \circ b$即{a,b}的上界**
  - **$a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b$, $\therefore aR(a \circ b)$**
  - **$b \circ (a \circ b) = (a \circ b) \circ b = a \circ (b \circ b) = a \circ b$ $\therefore bR(a \circ b)$**
- **$a \circ b$即{a,b}的最小上界**
  - **任给$c \in L$, 若c也是{a,b}的上界， 则$a \circ c = c$, $b \circ c = c$**
  - **$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ c = c$，即 $(a \circ b)\ R\ c$**

a*b即{a,b}的最大下界

注意：$a \circ b=b \Leftrightarrow a*b=a$，因此$aRb \Leftrightarrow a*b=a$

- **a*b即{a,b}的下界**
  - **$(a*b)*a=a*(a*b)=(a*a)*b=a*b$，　$\therefore (a*b)Ra$**
  - **$(a*b)*b=a*(b*b)=a*b$，$\therefore (a*b)Rb$**
- **a*b即{a,b}的最大下界**
  - **任给 $c \in L$, 若c也是{a,b}的下界，则 $c*a=c$, $c*b=c$**
  - **$c*(a*b)=(c*a)*b=c*b=c$, 即$c\ R\ (a*b)$**

偏序格与代数格的等价

- 〈**L, R**〉即偏序格
- ***和◦即相应的“保交”和“保联”运算**
- **代数格〈L, *, ◦〉即相应的导出代数系统**

有关格的性质的进一步讨论

- **设L是格，$\forall a,b,c,d \in L$, 若$a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 则$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$, $a \vee c \preccurlyeq b \vee d$**
  - **$\because a \wedge c \preccurlyeq a \preccurlyeq b$, $a \wedge c \preccurlyeq c \preccurlyeq d$, 即$a \wedge c$是$\{b,d\}$的一个下界，$\therefore a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$;**
  - **$\because a \preccurlyeq b \preccurlyeq b \vee d$, $c \preccurlyeq d \preccurlyeq b \vee d$, 即$b \vee d$是$\{a, c\}$的一个上界，$\therefore a \vee c \preccurlyeq b \vee d$**

有关格的性质的进一步讨论

- **分配不等式：**

$$\forall a,b,c\in L,\ a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

  - 由$a\preccurlyeq a$和 $b\wedge c\preccurlyeq b$可得： $a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee b)$；
  - 由$a\preccurlyeq a$和$b\wedge c\preccurlyeq c$可得： $a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee c)$
  - $\therefore\ a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

注意：根据对偶原理，“对称的”的分配不等式是：

$$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\preccurlyeq a\wedge(b\vee c)$$