- 书面作业讲解
  - TC第28.1节练习2、3、6、7
  - TC第28.2节练习1、2、3
  - TC第28.3节练习1、3
  - TC第28章问题1
  - TC第29.1节练习4、5、6、7、9
  - TC第29.2节练习2、3、6
  - TC第29.3节练习2、3、5
  - TC第29.4节练习2
  - TC第29章问题1

TC第28.1节练习6

- n>1时：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

- n=1时？

$$(0) = (1) \cdot (0)$$

TC第28.1节练习7

- k=n时到底需不需要执行最外层循环？

LU-DECOMPOSITION(A)

```
n = A.rows
let L and U be new n × n matrices
initialize U with 0s below the diagonal
initialize L with 1s on the diagonal and 0s above the diagonal
for k = 1 to n
    u_kk = a_kk
    for i = k + 1 to n
        l_ik = a_ik / u_kk        // l_ik holds v_i
        u_ki = a_ki               // u_ki holds w_i^T
    for i = k + 1 to n
        for j = k + 1 to n
            a_ij = a_ij − l_ik u_kj
return L and U
```

LUP-DECOMPOSITION(A)

```
n = A.rows
let π[1..n] be a new array
for i = 1 to n
    π[i] = i
for k = 1 to n
    p = 0
    for i = k to n
        if |a_ik| > p
            p = |a_ik|
            k' = i
    if p == 0
        error "singular matrix"
    exchange π[k] with π[k']
    for i = 1 to n
        exchange a_ki with a_k'i
    for i = k + 1 to n
        a_ik = a_ik / a_kk
        for j = k + 1 to n
            a_ij = a_ij − a_ik a_kj
```

TC第28.2节练习1

- 利用矩阵平方来得到矩阵乘法

$$D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & AB \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TC第28.2节练习3

- 矩阵乘法→求行列式
  - 求行列式 ≤ LUP分解 $\det(A) = \det(P^{-1})\det(L)\det(U) = (-1)^S \left(\prod_{i=1}^{n} l_{ii}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} u_{ii}\right)$
  - LUP分解 ≤ 矩阵乘法 练习28.2-2
- 求行列式→矩阵乘法
  - 矩阵乘法 ≤ 求逆矩阵 定理28.1
  - 求逆矩阵 ≤ 求行列式+求伴随矩阵 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\operatorname{adj}(\mathbf{A})$
  - 求伴随矩阵 ≤ 求行列式 derivative inequality

TC第29.1节练习4

1. minimize → maximize

   $2x_1 + 7x_2 + x_3 \Rightarrow -2x_1 - 7x_2 - x_3$

2. nonnegativity constraints

   $x_1 \Rightarrow x_1'$-x_1''

   $x_3 \Rightarrow x_3'$-x_3''

3. equality constraints → inequality constraints
4. ≥ → ≤

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{minimize} & 2x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & & \\
\text{subject to} & & & & & & & \\
& x_1 & & & - & x_3 & = & 7 \\
& 3x_1 & + & x_2 & & & \geq & 24 \\
& & & x_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & x_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

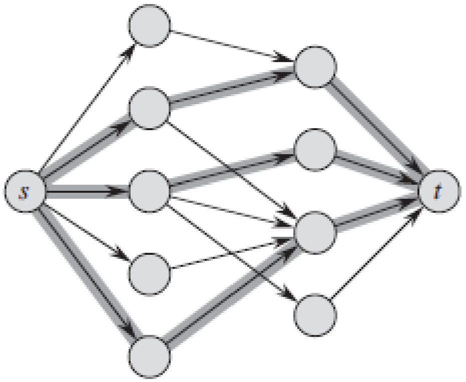
TC第29.2节练习2

$$
\begin{array}{lrcll}
\boxed{\text{maximize}} & d_t & & & \\
\text{subject to} & & & & \\
 & d_v & \boxed{\leq} & d_u + w(u,v) & \text{for each edge } (u,v) \in E\,, \\
 & d_s & = & 0\,. &
\end{array}
$$

- 有一些同学额外添上了$d_v \geq 0$，行不行？

TC第29.2节练习6

- 二部图最大匹配 → 最大流



- 新增边的capacity怎么设？可以设为∞吗？

TC第29章问题1a

a. Show that if we have an algorithm for linear programming, we can use it to solve a linear-inequality feasibility problem. The number of variables and constraints that you use in the linear-programming problem should be polynomial in n and m.

- 一种（不够完美的）解法
  - “任取”一个目标函数，求解LP
  - 不完美之处：如果结果是unbounded，只能判断不等式组有解，但给不出具体的解
- 另一种解法
  - 例如，将待验证的不等式组

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\le 2 \\ x_1 - 5x_2 &\le -4 \end{aligned}$$

  - 转为以下LP

maximize $-x_0$

subject to

$$\begin{aligned} x_0 + 2x_1 - x_2 &\le 2 \\ x_0 + x_1 - 5x_2 &\le -4 \\ x_0 &\ge 0 \end{aligned}$$

根据“是否能算出最优解为0”做出判断（类似引理29.11）

TC第29章问题1b

b. Show that if we have an algorithm for the linear-inequality feasibility problem, we can use it to solve a linear-programming problem. The number of variables and linear inequalities that you use in the linear-inequality feasibility problem should be polynomial in n and m, the number of variables and constraints in the linear program.

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{subject to} \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_j \ge 0 \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\
\text{subject to} \quad & \\
& \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n , \\
& y_i \ge 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m .
\end{aligned}
$$

$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ 将此与上述约束联合，找一个可行解

- 教材讨论
  - TC第30章
  - TJ第3、4、5、6章

问题1：多项式表示的转换

- 多项式的coefficient representation是一个什么？
  - a vector of coefficients
- 多项式的point-value representation是一个什么？
  - a set of n point-value pairs
- 一个cr可以对应几个pvr？一个pvr可以对应几个cr？为什么？

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

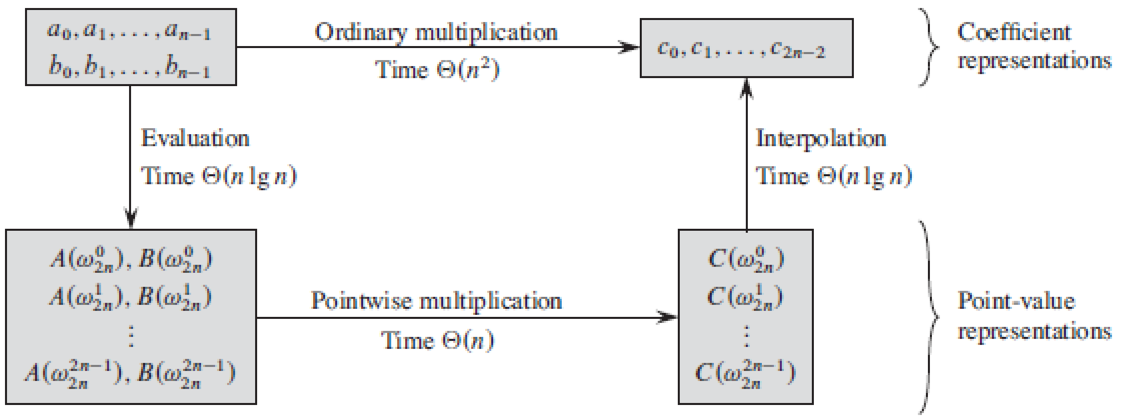
问题1：多项式表示的转换 (续)

	coefficient representation	point-value representation
加法的时间	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
乘法的时间	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
求值的时间	$\Theta(n)$	?

哪种表示更好呢？

问题1：多项式表示的转换 (续)

- 你理解整个流程了吗？
  - 目的是什么？
  - 手段是什么？



问题1：多项式表示的转换 (续)

- DFT和FFT分别是什么意思？它们之间是什么关系？
  - y是a的DFT

$$
\begin{aligned}
y_k &= A(\omega_n^k) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj}
\end{aligned}
$$

问题1：多项式表示的转换 (续)

- 你能阐述FFT的基本思路吗？
  - 目标是求什么？
  - 用什么策略来求？

$$A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \qquad \omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$$

$$A(x) = A^{[0]}(x^2) + xA^{[1]}(x^2)$$

$$\begin{aligned} A^{[0]}(x) &= a_0 + a_2x + a_4x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n/2-1} \\ A^{[1]}(x) &= a_1 + a_3x + a_5x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n/2-1} \end{aligned}$$

  - halving lemma在这里起了什么作用？
  - 它的运行时间如何递归表示？ $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$
  - 你还记得怎么解这个递归式吗？

问题1：多项式表示的转换 (续)

- interpolation怎么做呢？

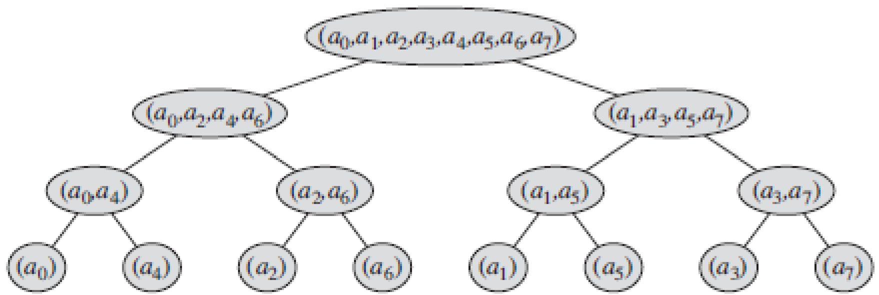
$$a_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \omega_n^{-kj}$$

vs.

$$\begin{aligned} y_k &= A(\omega_n^k) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj} \end{aligned}$$

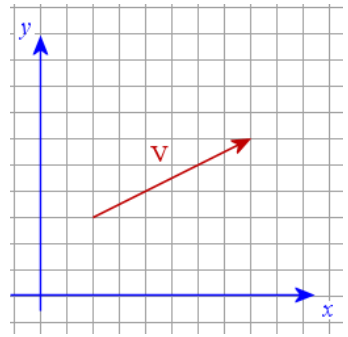
问题1：多项式表示的转换 (续)

- 迭代实现FFT的基本思路是什么？
- 叶子节点的顺序是如何确定的？
- 你能给出直观的解释吗？



问题2：群

- 在二维平面上的移动，例如：向东北方向移动3公里
  - 你能以此为元素构建一个群吗？
  - 这个群的两个组成部分是什么？
  - 为什么构成的是一个群？
  - 它是阿贝尔群吗？为什么？



  - 你能找出一些它的子群吗？并说明为什么找到的是一个子群
  - 它是循环群吗？
  - 添加什么条件可以将它改造为一个循环群？
  - 它的生成元是什么？唯一吗？

问题2：群 (续)

- 你能将之前的例子改造为另一种循环群吗？
- 它的生成元是什么？唯一吗？
- 它是阿贝尔群吗？为什么？
- 你能找出一些它的子群吗？
- 这些子群是循环群吗？为什么？

问题2：群 (续)

- 我们请五位同学到讲台上进行真人演示
  - 按身高排成一行
  - 你能将他们的位置表示为一个置换群吗？
  - 请演示一个长为3的轮换
  - 请演示一个对换，且与刚才的轮换不相交
  - 你能将之前的轮换表示为若干对换的乘积吗？
  - 你能找出另一种表示方法吗？

问题2：群 (续)

- 你能将魔方表示为一个置换群吗？
- 它有轮换和对换吗？

- 你能找出一些它的子群吗？
- 你能为其中一个子群找出一些陪集吗？