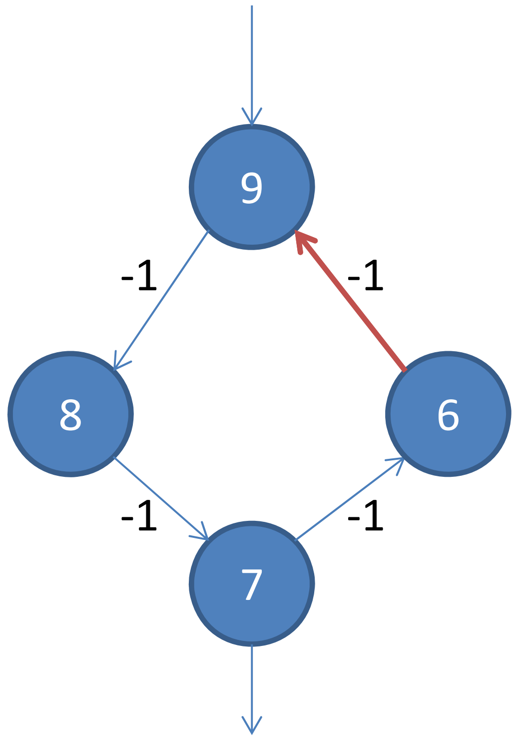
- 作业讲解
  - TC第24.1节练习2、3、4
  - TC第24.2节练习2
  - TC第24.3节练习2、4、7
  - TC第24.5节练习2、5
  - TC第24章问题2、3

TC第24.1节练习4

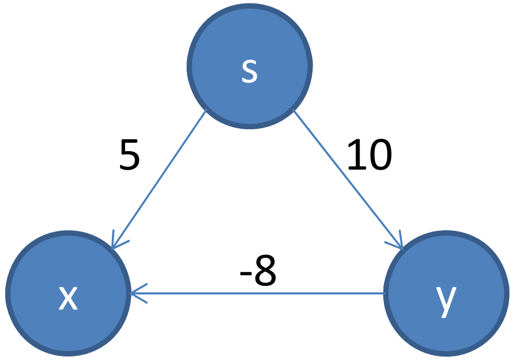
for each edge (u,v)∈G.E
    if v.d>u.d+w(u,v)
        v.d=-∞
这样可以吗？

for i=1 to |G.V|-1
    for each edge (u,v)∈G.E
        if v.d>u.d+w(u,v)
            v.d=-∞

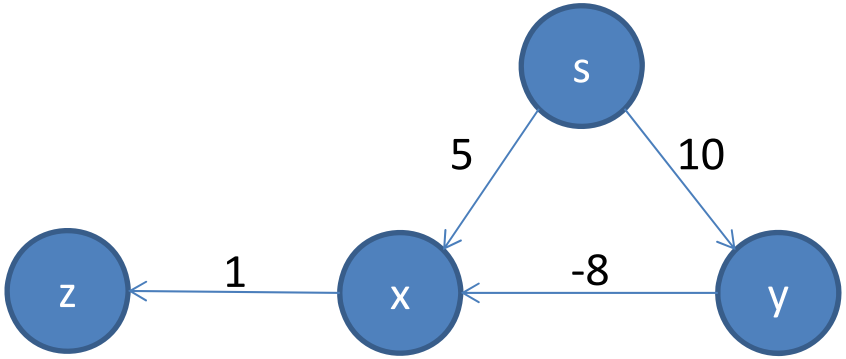


TC第24.3节练习2

- 这是反例吗？
- Dijkstra算法的结果是什么？



- 怎么将它改造成反例？



TC第24.3节练习4

- v. π是前驱，不是后继！
  （什么是前驱？）

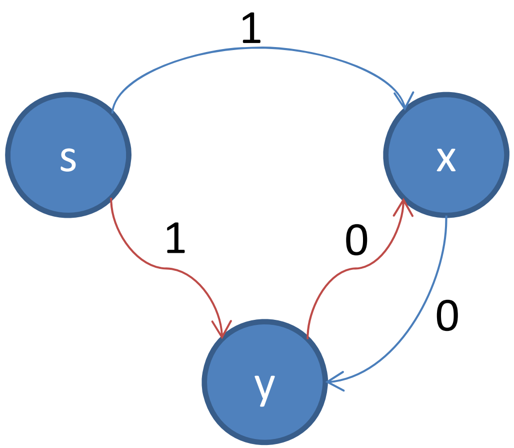
TC第24.3节练习7

- … and assume that no two vertices have the same shortest-path weights from source vertex *s*
  - 看清题意，说的不是”no two edges have the same weights”

TC第24.5节练习2

24.5-2

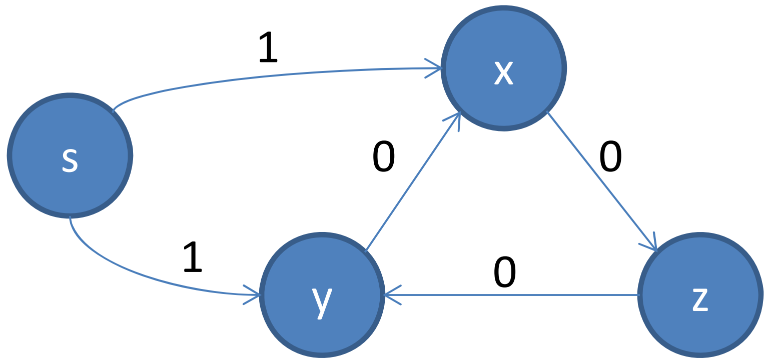
Give an example of a weighted, directed graph $G = (V, E)$ with weight function $w : E \to \mathbb{R}$ and source vertex s such that G satisfies the following property: For every edge $(u, v) \in E$, there is a shortest-paths tree rooted at s that contains (u, v) and another shortest-paths tree rooted at s that does not contain (u, v).



TC第24.5节练习5

24.5-5

Let $G = (V, E)$ be a weighted, directed graph with no negative-weight edges. Let $s \in V$ be the source vertex, and suppose that we allow $v.\pi$ to be the predecessor of v on *any* shortest path to v from source s if $v \in V - \{s\}$ is reachable from s, and NIL otherwise. Give an example of such a graph G and an assignment of π values that produces a cycle in G_π. (By Lemma 24.16, such an assignment cannot be produced by a sequence of relaxation steps.)



TC第24章问题2

24-2 *Nesting boxes*

A d-dimensional box with dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ ***nests*** within another box with dimensions $(y_1, y_2, \ldots, y_d)$ if there exists a permutation π on $\{1, 2, \ldots, d\}$ such that $x_{\pi(1)} < y_1, x_{\pi(2)} < y_2, \ldots, x_{\pi(d)} < y_d$.

a. Argue that the nesting relation is transitive.

- 问什么，就证什么
  - 对于任意的π_{xy}和π_{yz}，构造π_{xz}

TC第24章问题2 (续)

c. Suppose that you are given a set of n d-dimensional boxes $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$. Give an efficient algorithm to find the longest sequence $\langle B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_k} \rangle$ of boxes such that B_{i_j} nests within $B_{i_{j+1}}$ for $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Express the running time of your algorithm in terms of n and d.

- 构建表示nest关系的有向图（边权设为-1）
- 求最短路（从哪个点开始的最短路？）
  - 需要新增一个点

TC第24章问题3

24-3 Arbitrage

Arbitrage is the use of discrepancies in currency exchange rates to transform one unit of a currency into more than one unit of the same currency. For example, suppose that 1 U.S. dollar buys 49 Indian rupees, 1 Indian rupee buys 2 Japanese yen, and 1 Japanese yen buys 0.0107 U.S. dollars. Then, by converting currencies, a trader can start with 1 U.S. dollar and buy $49 \times 2 \times 0.0107 = 1.0486$ U.S. dollars, thus turning a profit of 4.86 percent.

Suppose that we are given n currencies $c_1, c_2, \ldots, c_n$ and an $n \times n$ table R of exchange rates, such that one unit of currency c_i buys $R[i, j]$ units of currency c_j.

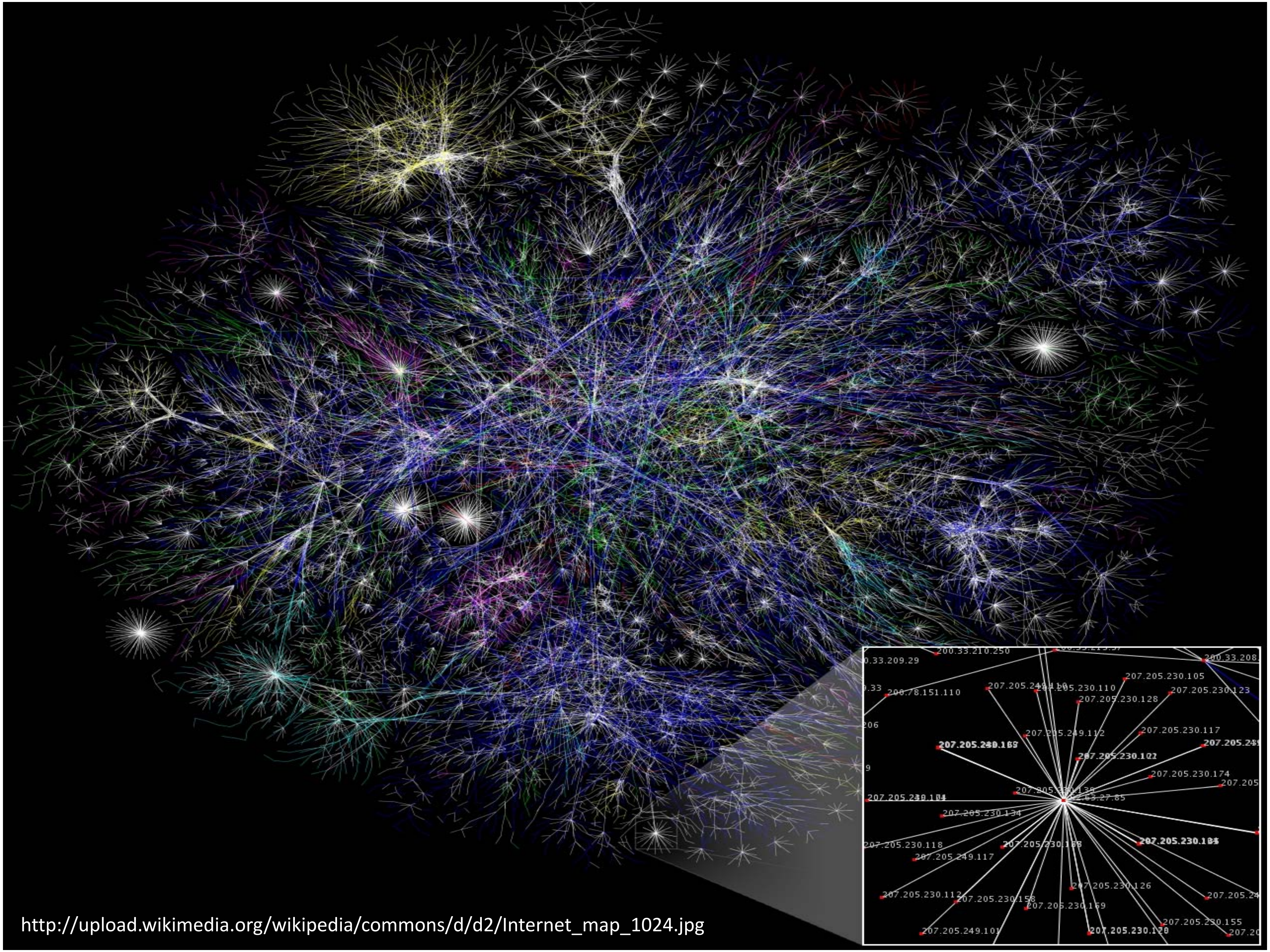
a. Give an efficient algorithm to determine whether or not there exists a sequence of currencies $\langle c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_k} \rangle$ such that

$$R[i_1, i_2] \cdot R[i_2, i_3] \cdots R[i_{k-1}, i_k] \cdot R[i_k, i_1] > 1 .$$

Analyze the running time of your algorithm.

- 兑换是乘法，路长是加法，如何转换？
  - 取对数
- 要以每个点都作为s试一次

- 教材讨论
  - GC第5章第1、2、3节
  - GC第6章第1、2节

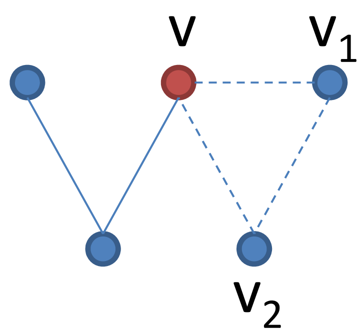


http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d2/Internet_map_1024.jpg

问题1：割点和割边

这是割点的几种等价定义，你能证明它们的等价性吗？

1. v是G的割点。
2. G-v不连通。
3. 存在V(G)\{v}的一个划分：V(G)\{v}=U∪W，U∩W=∅，使得对∀u∈U和∀w∈W，v在每条u-w路上。
4. 存在u, w∈V(G)，使得u, w异于v，且v在每条u-w路上。

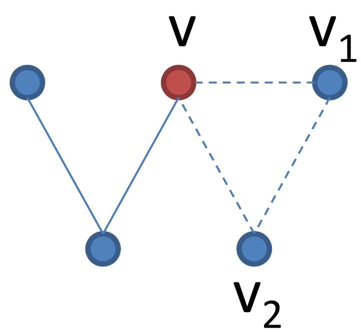


实际上，非连通图上也存在“割点”，你能给出一种优雅的定义吗？

问题1：割点和割边

这是割点的几种等价定义，你能证明它们的等价性吗？

1. v是G的割点。
2. G-v不连通。
3. 存在V(G)\{v}的一个划分：V(G)\{v}=U∪W，U∩W=∅，使得对∀u∈U和∀w∈W，v在每条u-w路上。
4. 存在u, w∈V(G)，使得u, w异于v，且v在每条u-w路上。



实际上，非连通图上也存在“割点”，你能给出一种优雅的定义吗？

问题1：割点和割边 (续)

这是割边的一种等价定义，你能证明它们的等价性吗？

1. e是G的割边。
2. e不在G的任何圈中。

问题2：块

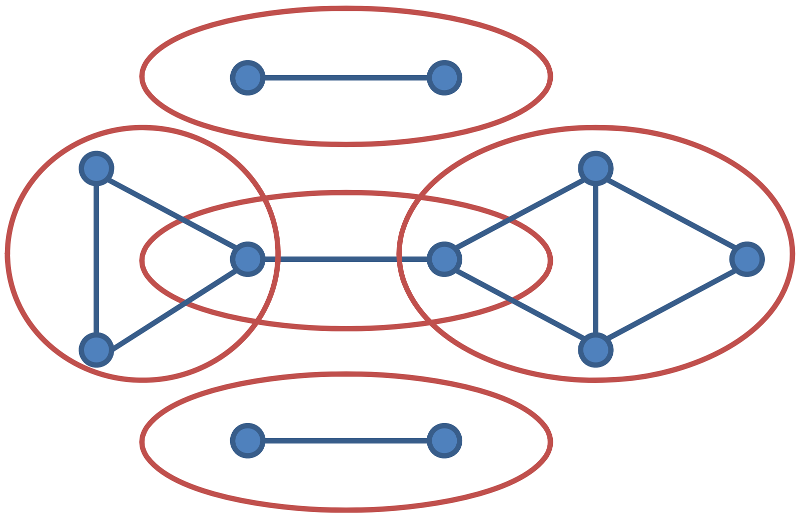
这是不可分图（块）的几种等价定义

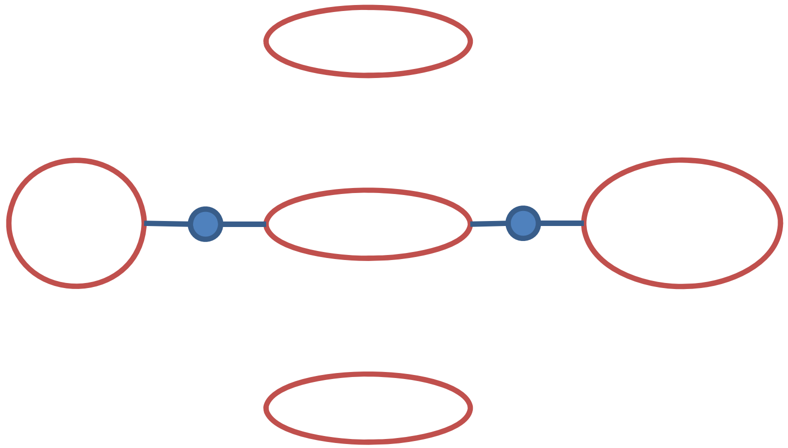
1. G是不可分图（块）。
2. G的任二顶点共圈。
3. G的任一顶点与任一边共圈。
4. G的任二边共圈。
5. 对$\forall u, v \in V(G)$及$\forall e \in E(G)$，存在u-v路含有边e。
6. 对$\forall u, v, w \in V(G)$，存在u-v路含有顶点w。
7. 对$\forall u, v, w \in V(G)$，存在u-v路不含有顶点w。

我们将在《图论》课上讨论这些定义的等价性

问题2：块 (续)

- 为什么两个块最多只有一个公共顶点？
- 为什么这个公共顶点一定是割点？
- 于是，我们可以将一个图转化为一种“块-割点图”
  - “块-割点图”有什么特点？





问题3：连通度

- 一个图的（点）连通度(κ)是如何定义的？
- 你能分别给出一个连通度为0、1、2、3的非完全图吗？
- κ=*k*和*k*-connected的区别是什么？

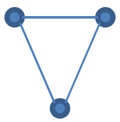
- 一个图的边连通度(κ′或λ)是如何定义的？
- 你能分别给出一个边连通度为0、1、2、3的非完全图吗？
- λ=*k*和*k*-edge-connected的区别是什么？

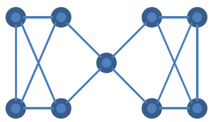
问题3：连通度 (续)

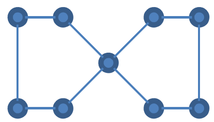
- $\kappa \le \lambda \le \delta$，你能分别举出一个例子吗？
  - $\kappa = \lambda = \delta$
  - $\kappa < \lambda < \delta$
  - $\kappa < \lambda = \delta$
  - $\kappa = \lambda < \delta$

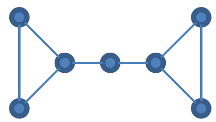
问题3：连通度 (续)

- κ≤λ≤δ，你能分别举出一个例子吗？
  - κ=λ=δ
  - κ<λ<δ
  - κ<λ=δ
  - κ=λ<δ



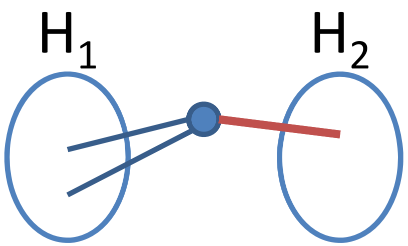


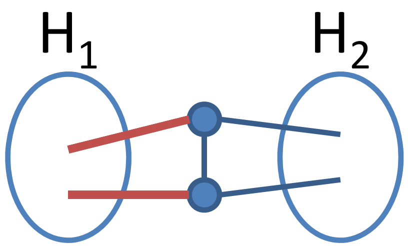




问题3：连通度 (续)

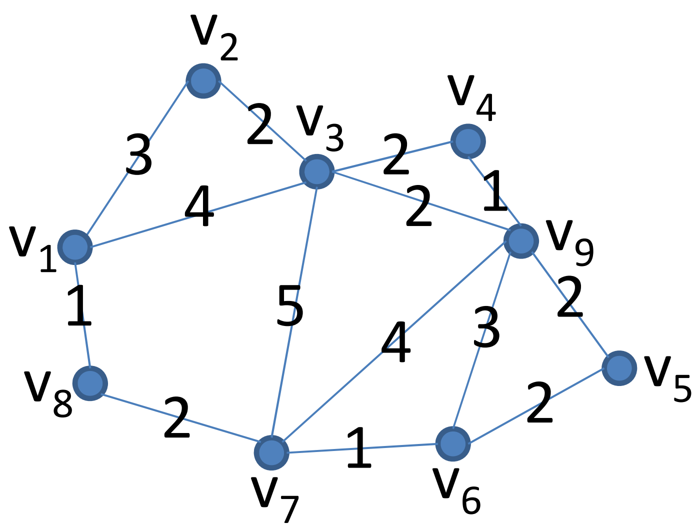
- 3-正则图满足κ=λ，你能结合这两个示意图给出证明吗？





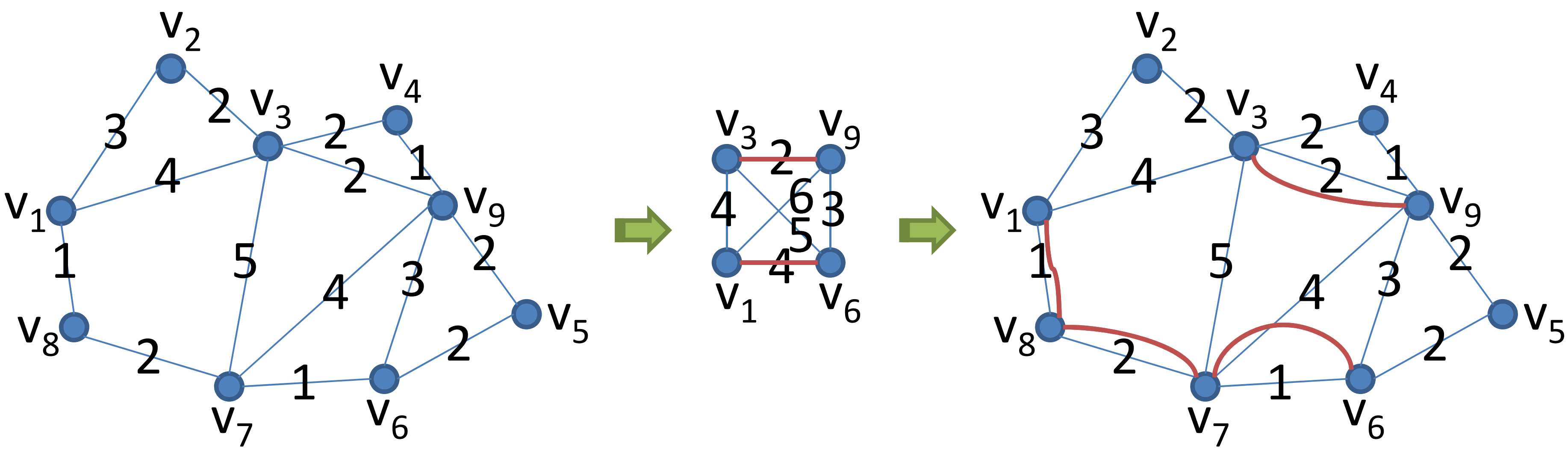
问题4：欧拉图

- 什么是欧拉图？
- 对于中国邮递员问题，你有什么解决思路？
  - 如果是欧拉图，怎么办？
  - 如果不是欧拉图，怎么办？



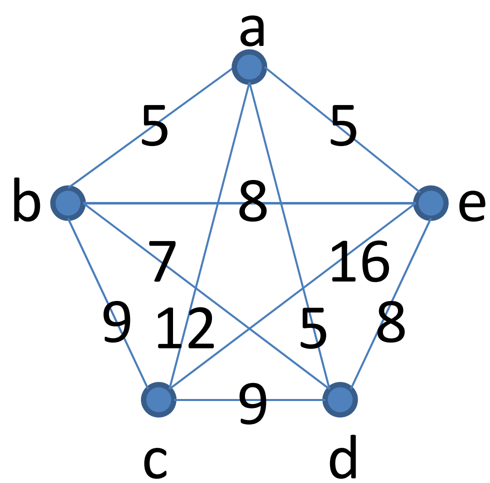
问题4：欧拉图

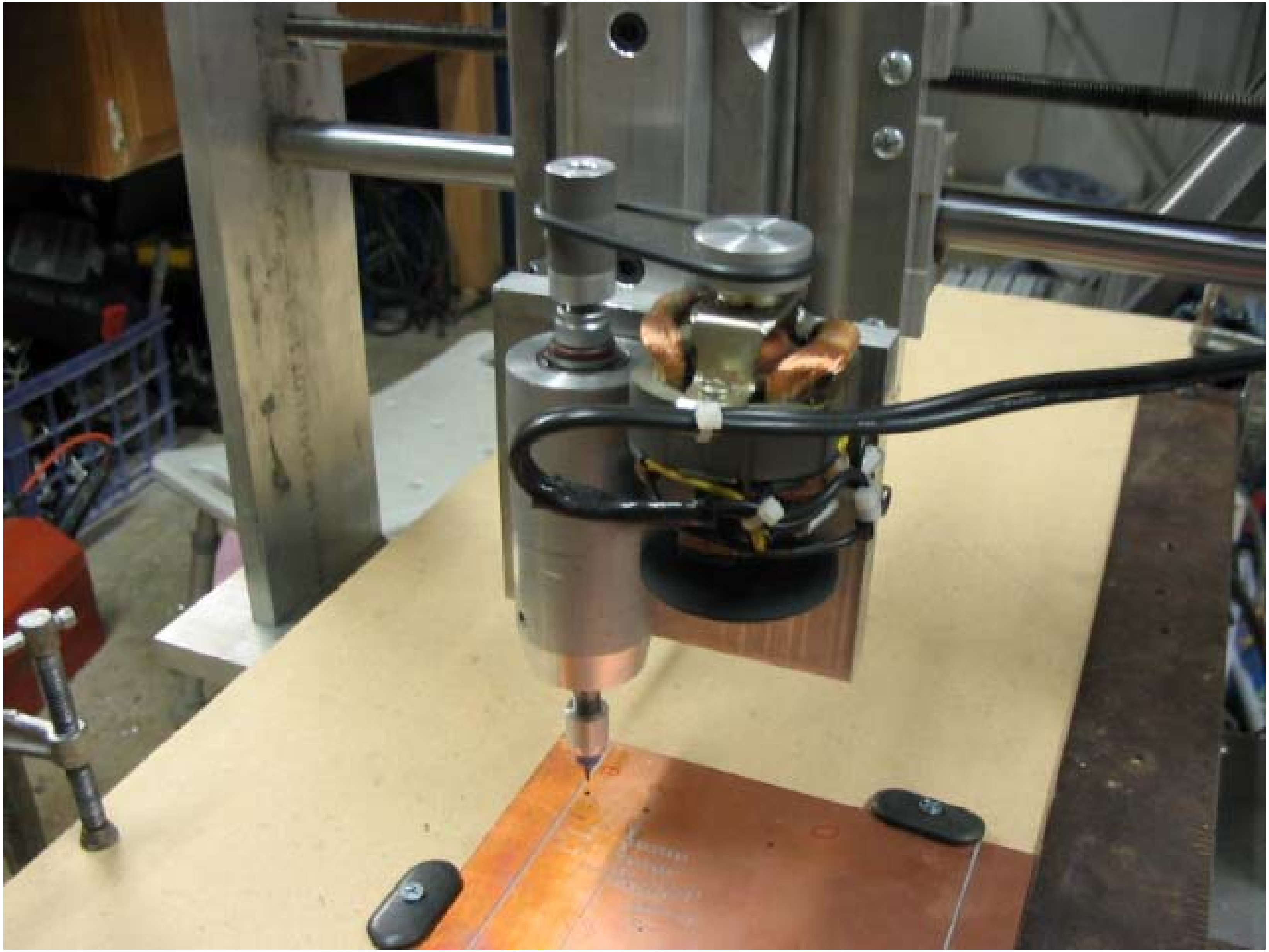
- 什么是欧拉图？
- 对于中国邮递员问题，你有什么解决思路？
  - 如果是欧拉图，怎么办？
  - 如果不是欧拉图，怎么办？



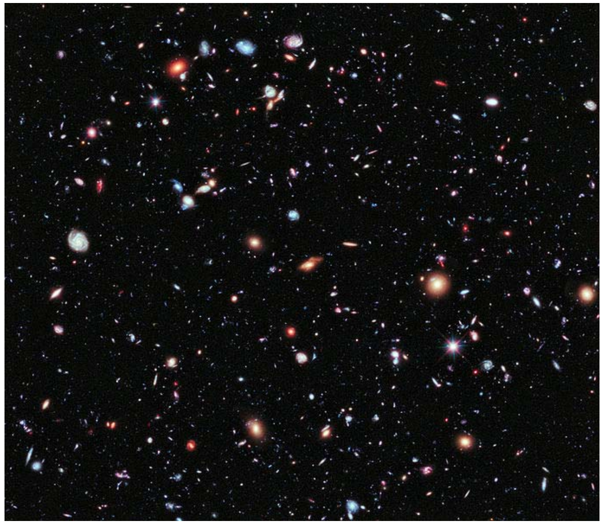
问题5：哈密尔顿图

- 什么是哈密尔顿图？
- 你听说过旅行商问题吗？
  你能想到这个问题的其它应用场景吗？





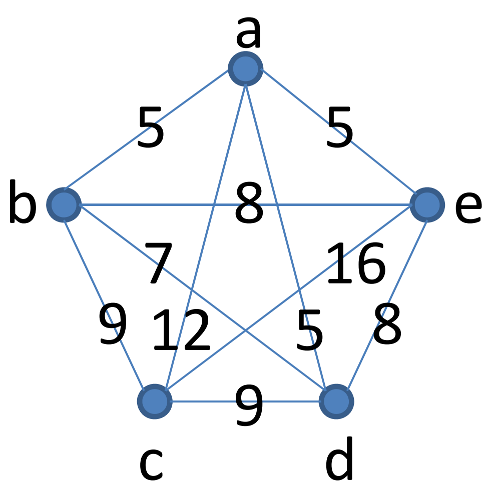
http://www.buildyouridea.com/cnc/pcb_drill/pcb_drill_4.jpg



http://en.wikipedia.org/wiki/File:100inchHooker.jpg
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Constellation_Fornax,_EXtreme_Deep_Field.jpg

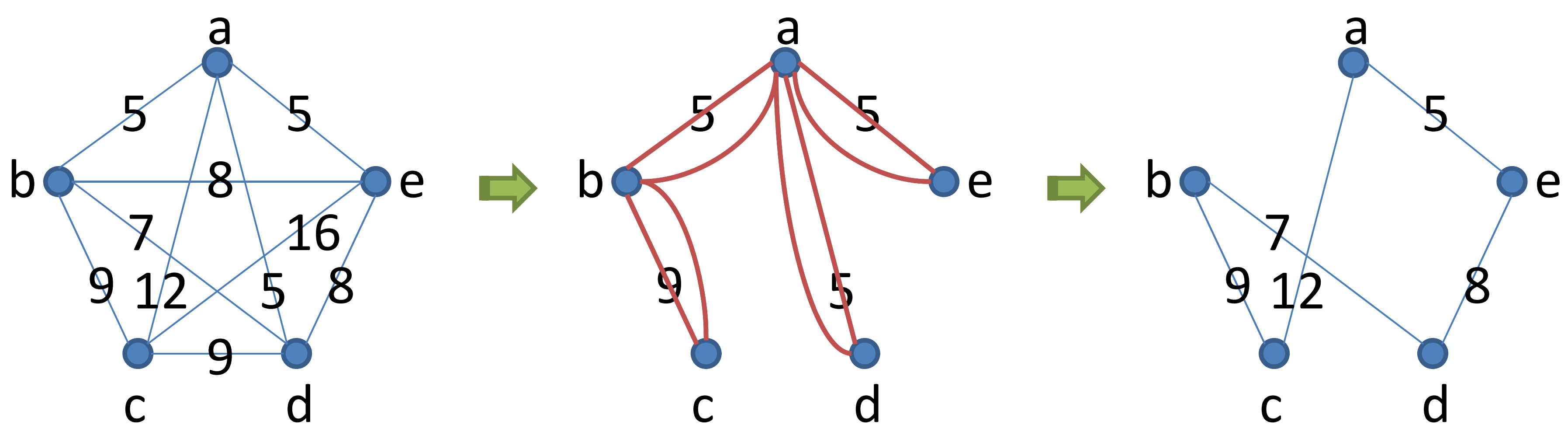
问题5：哈密尔顿图 (续)

- 对于旅行商问题，你有什么解决思路？（不一定要给出最优解）



最小生成树法

1. 找K_n的一棵最小生成树T。
2. 为T中的每条边添加重边成为T*。
3. 找T*的一条欧拉闭迹C。
4. 沿C前行，跳过已访问过的顶点，直至访问完所有顶点。



最小生成树法 (续)

- 近似比w(H)/w(H*)<2。你能解释这个证明过程吗？

证明：

1. 三角不等式 ⇒ w(H)≤w(C)=w(T*)=2w(T)
2. 且w(H*)>w(T)
3. 因此，w(H)/w(H*)<2

- T：最小生成树
- T*：T添加重边后
- C：欧拉闭迹
- H：算法给出的解
- H*：最优解