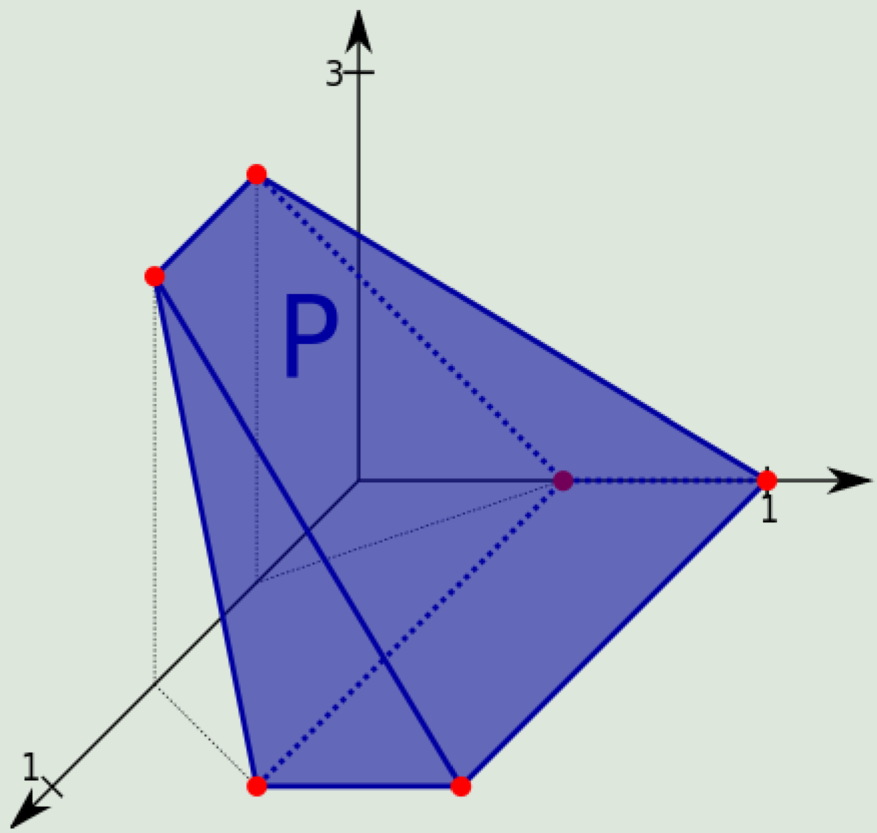
OPEN TOPIC I

convexity of the closed feasible region of a linear programming problem

Ge, Yifan
Kuang Yaming Honors School, NJU
151242011@smail.nju.edu.cn

问题重述

线性规划问题可行域的凸性



概念定义

什么叫做凸?

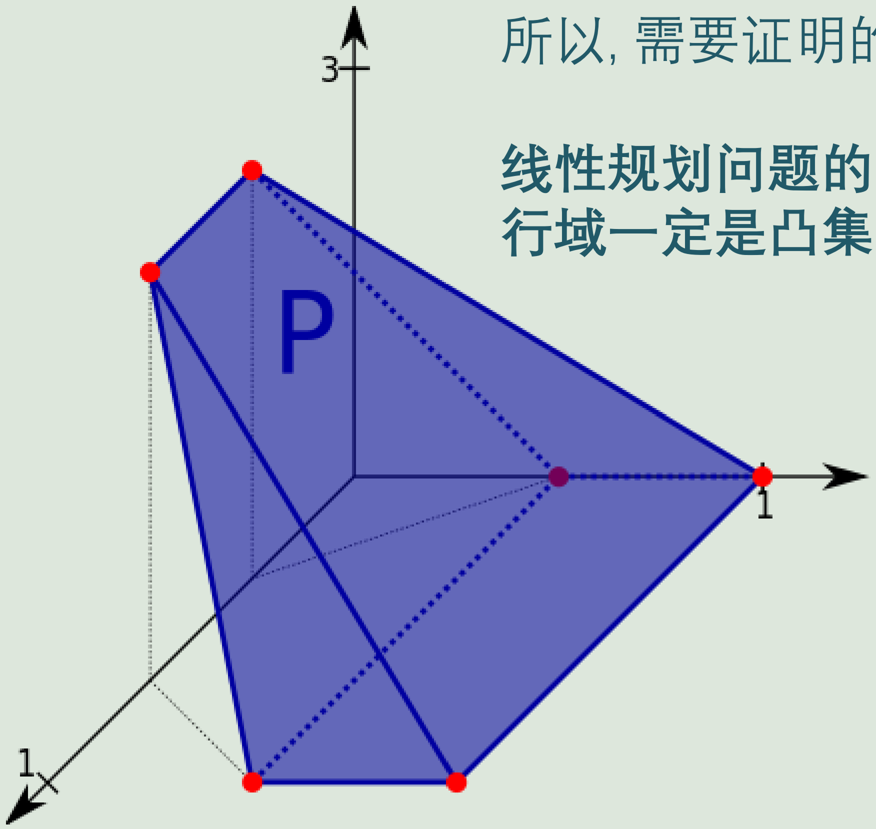
凸多胞形: 同时也是$\mathbf{R}^n$中的一个凸集的多胞形

多胞形: 由平的边界构成的几何对象

$\mathbf{R}^n$中的凸集: 凸集C中的两个点连线段上的点都属于C

问题重述

线性规划问题可行域的凸性



所以，需要证明的是：

线性规划问题的可行域一定是凸集.

证明一

线性代数

命题: 若$\boldsymbol{A}x \leq 0$且$\boldsymbol{A}y \leq 0$, 则$\boldsymbol{A}(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq 0$, 其中$\lambda \in (0,1)$.

证明:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \boldsymbol{A}(\lambda x) + \boldsymbol{A}\big((1-\lambda)y\big) \\ &= \lambda(\boldsymbol{A}x) + (1-\lambda)(\boldsymbol{A}y) \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

■

证明二

数学归纳法

$p(n)$: 加入了n个限制后的可行域s_n为凸集. $(n \geq 0)$

奠基: $p(0)$成立. $\lambda x_i + (1-\lambda) y_i \geq 0$, $\lambda \in (0,1)$.

递推: 设$p(k)$成立. 则, 对于加入第$k+1$个限制后的可行域s_{k+1}, 其中任选两点a, b. 假设线段ab上有点$c \notin s_{k+1}$, 则又因为$a, b \in s_k$, 有$c \in s_k$, 于是有$c \in s_k - s_{k+1}$. 将第$k+1$个限制的划分所对应的平面记为π_{k+1}. 则, 线段ac和线段bc都与π_{k+1}有交点. 由于ac和bc都在线段ab上, 所以它们与π_{k+1}交于同一点, 即c. 也即$c \in \pi_{k+1} \subseteq s_{k+1}$, 与假设矛盾. 因此, $\forall c \in ab, c \in s_{k+1}$.

由归纳假设, $p(n)$对于任意的n都是真命题. ■

Q&A