- 教材讨论
  - UD第10、11、12章

问题1：关系的基本概念

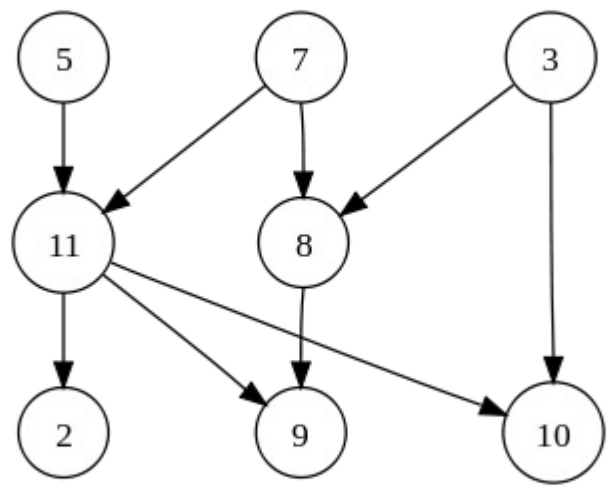
- 你理解这些关系了吗？
  - 自反 (reflexive)
  - 反自反 (irreflexive)
  - 对称 (symmetric)
  - 反对称 (antisymmetric) $\forall a,b \in X,\ R(a,b) \wedge R(b,a) \ \Rightarrow\ a = b$
  - 强反对称/非对称 (asymmetric) $\forall a,b \in X,\ aRb \ \Rightarrow \neg(bRa)$
  - 传递 (transitive)
  - 等价 (equivalence)
  - 偏序 (partial order)
  - 全序 (total order)

问题1：关系的基本概念 (续)

- 你能从日常生活中举出这些关系的例子吗？
  - 自反、对称、非传递
  - 自反、反对称、非传递
  - 反自反、对称、非传递
  - 反自反、反对称、非传递
  - 自反、对称、传递
  - 自反、反对称、传递
  - 反自反、对称、传递
  - 反自反、反对称、传递
  - 偏序、非全序
  - 全序

问题1：关系的基本概念 (续)

- 这些关系对应的图有什么特征？
  - 自反
  - 对称
  - 传递
  - 偏序
  - 全序



问题1：关系的基本概念 (续)

- 下面这个证明正确吗？

We claim that if a relation on a set X is symmetric and transitive, then it is reflexive. Here's a proof of this claim:

Proof. Let $x \in X$. Let $y \in X$ with $x \sim y$. By symmetry we have $y \sim x$. We now use transitivity to conclude that $x \sim x$. $\boxed{?}$

问题2：等价关系与划分

- N上的关系R，满足x～y当且仅当∃z∈Z, (x-y=3z)
  - R是等价关系吗？
    - 如果是，它的等价类有哪些？（什么是等价类？）
    - 如果不是，那它是什么样的关系？

问题2：等价关系与划分 (续)

- 你能为以下这个集合定义出一些有意义的划分吗？对应的等价关系分别是什么？

问题2：等价关系与划分 (续)

- 你能为以下这个集合定义出一些有意义的划分吗？对应的等价关系分别是什么？

男

女

问题2：等价关系与划分 (续)

- 你能为以下这个集合定义出一些有意义的划分吗？对应的等价关系分别是什么？

篮球运动员

乒乓运动员

问题2：等价关系与划分 (续)

- 这是否意味着，一种划分可能对应多种等价关系？


问题3：数集的界、极值和确界

- 你能说出这三个概念之间的区别吗？

	可以有几个？	在原集合中吗？
上界 (upper bound)		
最大值 (maximum)		
上确界 (supremum)		

问题3：数集的界、极值和确界

- 你能说出这三个概念之间的区别吗？

	可以有几个？	在原集合中吗？
上界 (upper bound)	0或无穷多个	未必
最大值 (maximum)	0或1个	在
上确界 (supremum)	0或1个	未必

问题4：实数的完备性

- 你是如何理解实数的完备性或者有理数的不完备性的？（忘记教材）

问题4：实数的完备性

- 你是如何理解实数的完备性或者有理数的不完备性的？（忘记教材）
  - Intuitively, completeness implies that there are not any “gaps” or “missing points” in the real number line. This contrasts with the rational numbers, whose corresponding number line has a “gap” at each irrational value.

问题4：实数的完备性 (续)

- “有间隙”这件事情，你能想到什么数学方式来表达？

问题4：实数的完备性 (续)

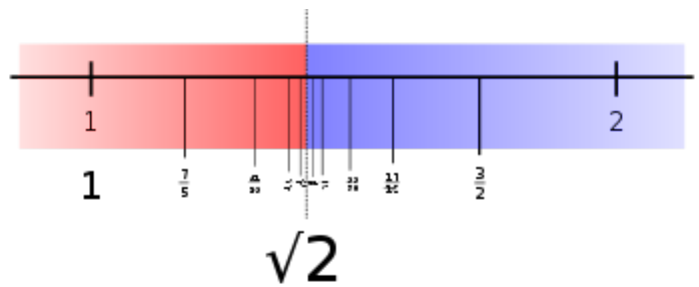
- “有间隙”这件事情，你能想到什么数学方式来表达？
  - A Dedekind cut, named after Richard Dedekind, is a partition of the rational numbers into two non-empty parts A and B, such that all elements of A are less than all elements of B, and A contains no greatest element.

问题4：实数的完备性 (续)

- 有理数集上的Dedekind cut，B是不是一定有最小元？

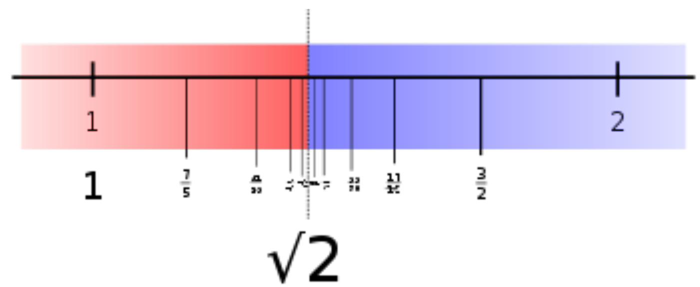
问题4：实数的完备性 (续)

- 有理数集上的Dedekind cut，B是不是一定有最小元？
  - 有时候有
  - 有时候没有



问题4：实数的完备性 (续)

- 有理数集上的Dedekind cut，B是不是一定有最小元？
  - 有时候有
  - 有时候没有



- B总是有最小元 ⇔ 没有间隙（刀刀命中）⇔ 是完备的
- 按照这种定义，有理数就是不完备的

问题4：实数的完备性 (续)

- 有理数虽然有间隙，但是“足够稠密”，你能想到什么数学方式来表达？

问题4：实数的完备性 (续)

- 有理数虽然有间隙，但是“足够稠密”，你能想到什么数学方式来表达？
  - 定理12.11. Let a and b be two real numbers satisfying $a<b$. Then there is a rational number c such that $a<c<b$.

问题4：实数的完备性 (续)

- 教材对于有理数不完备性的定义：
有理数的子集可能有上界但没有上确界。
  - 并举了一个例子（Example 12.13）
- 事实上，两种对于完备性的定义是等价的。

问题5： well-ordering principle of N

- 你理解well-ordering principle of N了吗？
- 你能利用数学归纳法证明吗？
  - 提示：反证法

Well-ordering principle of the natural numbers. *Every nonempty subset of the natural numbers contains a minimum.*

对非空自然数集S，欲证$\exists m\in S, (\forall x\in S, (m\le x))$。
采用反证法，结论的negation是什么？

对非空自然数集S，欲证$\exists m\in S, (\forall x\in S, (m\leq x))$。
采用反证法，结论的negation是什么？

$\forall m\in S, (\exists x\in S, (x<m))$，接下来，可以构造什么样的矛盾？

对非空自然数集S，欲证$\exists m\in S, (\forall x\in S, (m\leq x))$。
采用反证法，结论的negation是什么？

$\forall m\in S, (\exists x\in S, (x<m))$，接下来，可以构造什么样的矛盾？
欲证矛盾：自然数集S是空集。利用归纳法，Q(n)是什么？

对非空自然数集S，欲证$\exists m\in S, (\forall x\in S, (m\leq x))$。
采用反证法，结论的negation是什么？

$\forall m\in S, (\exists x\in S, (x<m))$，接下来，可以构造什么样的矛盾？
欲证矛盾：自然数集S是空集。利用归纳法，Q(n)是什么？

令Q(n)表示$n\notin S$，欲证Q(n)对所有自然数都成立。

1. Q(0)显然成立，为什么？

对非空自然数集S，欲证$\exists m \in S, (\forall x \in S, (m \leq x))$。
采用反证法，结论的negation是什么？

$\forall m \in S, (\exists x \in S, (x<m))$，接下来，可以构造什么样的矛盾？
欲证矛盾：自然数集S是空集。利用归纳法，Q(n)是什么？

令Q(n)表示$n \notin S$，欲证Q(n)对所有自然数都成立。

1. Q(0)显然成立，为什么？
2. 给定自然数n，如果对所有自然数$m<n$，Q(m)都成立，即$m \notin S$，欲证Q(n)成立。
    1. 采用反证法：如果Q(n)不成立，则$n \in S$。
    2. 则$\exists x \in S, (x<n)$，为什么？

对非空自然数集S，欲证$\exists m\in S, (\forall x\in S, (m\leq x))$。
采用反证法，结论的negation是什么？

$\forall m\in S, (\exists x\in S, (x<m))$，接下来，可以构造什么样的矛盾？
欲证矛盾：自然数集S是空集。利用归纳法，Q(n)是什么？

令Q(n)表示$n\notin S$，欲证Q(n)对所有自然数都成立。

1. Q(0)显然成立，为什么？
2. 给定自然数n，如果对所有自然数$m<n$，Q(m)都成立，即$m\notin S$，欲证Q(n)成立。
    1. 采用反证法：如果Q(n)不成立，则$n\in S$。
    2. 则$\exists x\in S, (x<n)$，为什么？
    3. 但由$x<n$可得$x\notin S$，为什么？

对非空自然数集S，欲证$\exists m\in S, (\forall x\in S, (m\le x))$。
采用反证法，结论的negation是什么？

$\forall m\in S, (\exists x\in S, (x<m))$，接下来，可以构造什么样的矛盾？
欲证矛盾：自然数集S是空集。利用归纳法，Q(n)是什么？

令Q(n)表示$n\notin S$，欲证Q(n)对所有自然数都成立。

1. Q(0)显然成立，为什么？
2. 给定自然数n，如果对所有自然数$m<n$，Q(m)都成立，即$m\notin S$，欲证Q(n)成立。
    1. 采用反证法：如果Q(n)不成立，则$n\in S$。
    2. 则$\exists x\in S, (x<n)$，为什么？
    3. 但由$x<n$可得$x\notin S$，为什么？
    4. 矛盾，所以Q(n)成立。

问题5：well-ordering principle of N (续)

- 我们在第17章中会看到：well-ordering principle of N和数学归纳法是等价的。