

“移动”群-1

周晓

南京大学匡亚明学院

March 10, 2021

1 定义“移动群”

- 问题描述
- 问题求解
- 群
- “移动”
 - 直角坐标
 - 极坐标

2 关于“移动”群的一些探讨

- 子群
- 是循环群吗
 - 同构
 - 直积
 - 结论

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

1 定义“移动群”

- 问题描述
- 问题求解
- 群
- “移动”
 - 直角坐标
 - 极坐标

2 关于“移动”群的一些探讨

- 子群
- 是循环群吗
 - 同构
 - 直积
 - 结论

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

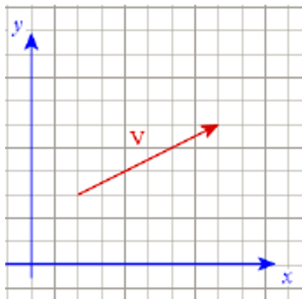
是循环群吗

同构

直积

结论

可以以二维平面上的“移动”为元素构建一个群吗？



“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

1 定义“移动群”

- 问题描述
- 问题求解
- 群
- “移动”
 - 直角坐标
 - 极坐标

2 关于“移动”群的一些探讨

- 子群
- 是循环群吗
 - 同构
 - 直积
 - 结论

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

- 群
- “移动”

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

1 定义“移动群”

- 问题描述
- 问题求解
- 群
- “移动”
 - 直角坐标
 - 极坐标

2 关于“移动”群的一些探讨

- 子群
- 是循环群吗
 - 同构
 - 直积
 - 结论

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

■ binary operation

$$G \times G \rightarrow G$$

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

■ binary operation

$$G \times G \rightarrow G$$

■ associative

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

■ binary operation

$$G \times G \rightarrow G$$

■ associative

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

■ identity element

$$e \circ a = a \circ e = a$$

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

■ binary operation

$$G \times G \rightarrow G$$

■ associative

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

■ identity element

$$e \circ a = a \circ e = a$$

■ inverse element

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

1 定义“移动群”

- 问题描述
- 问题求解
- 群
- “移动”
 - 直角坐标
 - 极坐标

2 关于“移动”群的一些探讨

- 子群
- 是循环群吗
 - 同构
 - 直积
 - 结论

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

二维平面的坐标移动

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

二维平面的坐标移动

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

- 直角坐标
- 极坐标

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

集合元素

$$G = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

集合元素

$$G = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

运算

$$\circ : (x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

自然加法

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

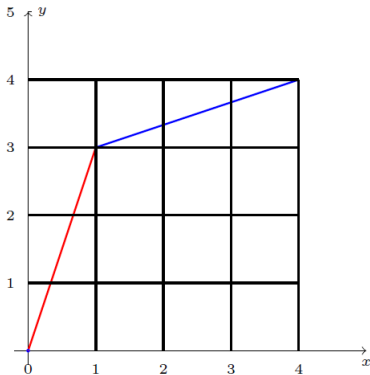
直积

结论

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

一个例子

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$



$$(1, 3) \circ (3, 1) = (4, 4)$$

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

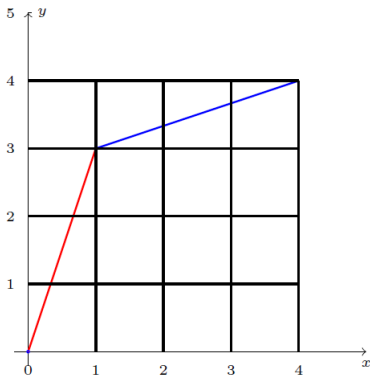
同构

直积

结论

一个例子

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$



$$(1, 3) \circ (3, 1) = (4, 4)$$

是群吗

“移动”群-1

周晓

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

$$\blacksquare + : G \times G \rightarrow G$$

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

“移动”群-1

周晓

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

- $+ : G \times G \rightarrow G$
- Associative

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \end{aligned}$$

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

“移动”群-1

周晓

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

- $+ : G \times G \rightarrow G$
- Associative

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \end{aligned}$$

- Identity element

$$(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y)$$

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

- $+ : G \times G \rightarrow G$

- Associative

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \end{aligned}$$

- Identity element

$$(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y)$$

- Inverse element

$$(x, y) + (-x, -y) = (-x, -y) + (x, y) = (0, 0)$$

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

- $+ : G \times G \rightarrow G$

- Associative

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \end{aligned}$$

- Identity element

$$(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y)$$

- Inverse element

$$(x, y) + (-x, -y) = (-x, -y) + (x, y) = (0, 0)$$

- Commutative

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

- $+ : G \times G \rightarrow G$

- Associative

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \end{aligned}$$

- Identity element

$$(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y)$$

- Inverse element

$$(x, y) + (-x, -y) = (-x, -y) + (x, y) = (0, 0)$$

- Commutative

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

是群，还是阿贝尔群！

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

集合元素

$$G = \{(r, \theta) | r \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi)\}$$

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

集合元素

$$G = \{(r, \theta) | r \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi)\}$$

运算

$$\circ : (r_1, \theta_1) \circ (r_2, \theta_2) = (r_3, \theta_3)$$

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

集合元素

$$G = \{(r, \theta) | r \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi)\}$$

运算

$$\circ : (r_1, \theta_1) \circ (r_2, \theta_2) = (r_3, \theta_3)$$

矢量加法

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

集合元素

$$G = \{(r, \theta) | r \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi)\}$$

运算

$$\circ : (r_1, \theta_1) \circ (r_2, \theta_2) = (r_3, \theta_3)$$

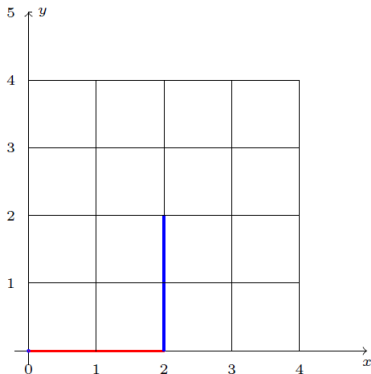
矢量加法

换汤不换药

“移动”群-1

周晓

一个例子



$$(2, 0) \circ (2, \frac{\pi}{2}) = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$$

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

1 定义“移动群”

- 问题描述
- 问题求解
- 群
- “移动”
 - 直角坐标
 - 极坐标

2 关于“移动”群的一些探讨

- 子群
- 是循环群吗
 - 同构
 - 直积
 - 结论

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

如何判断 H 是否是子群?

- $e \in H$
- $\forall h_1, h_2 \in H, h_1 h_2 \in H$
- $\forall h \in H, h^{-1} \in H$

如何判断 H 是否是子群?

- $e \in H$
- $\forall h_1, h_2 \in H, h_1 h_2 \in H$
- $\forall h \in H, h^{-1} \in H$

有很多子群

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\langle (x, y) \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

...

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

1 定义“移动群”

- 问题描述
- 问题求解
- 群
- “移动”
 - 直角坐标
 - 极坐标

2 关于“移动”群的一些探讨

- 子群
- 是循环群吗
 - 同构
 - 直积
 - 结论

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

同构 (isomorphic)

两个群 (G, \cdot) 和 (H, \circ) , 如果存在一个双射 $\phi : G \rightarrow H$ 满足

$$\forall a, b \in G, \phi(a \cdot b) = \phi(a) \circ \phi(b)$$

就称 G 与 H 同构, 记作 $G \cong H$

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

Theorem

所有的无限循环群都同构于整数加法群

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的
一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

Theorem

所有的无限循环群都同构于整数加法群

Proof.

令 G 为一个无限阶的循环群，并设 a 为其生成元。定义一个映射 $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow G: \phi(n) \mapsto a^n$ 。那么

$$\phi(m+n) = a^{m+n} = a^m a^n = \phi(m)\phi(n)$$

再证明 ϕ 为双射即可

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

直积 (direct products)

两个群 (G, \cdot) 和 (H, \circ) , 集合 $G \times H$ (笛卡尔积) 以及运算

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \circ h_2)$$

也是一个群

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

回到移动群

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

$$(\{(r, \theta) | r \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi)\}, \circ)$$

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

回到移动群

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

$$(\{(r, \theta) | r \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi)\}, \circ)$$

上面定义的两个群是循环群吗？

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

回到移动群

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

$$(\{(r, \theta) | r \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi)\}, \circ)$$

上面定义的两个群是循环群吗？

都不是，为什么？

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

回到移动群

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

$$(\{(r, \theta) | r \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi)\}, \circ)$$

上面定义的两个群是循环群吗？

都不是，为什么？

Proof.

无限循环群都同构于整数加法群，即无限循环群都是可数的，故都不为循环群 □

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

他们的子群 $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 呢?

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

他们的子群 $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 呢?

Proof.

假设 G 为循环群, 不妨设其生成元为 (a, b) , 由于 $(1, 0) \in G$, 则存在 n , 使得 $nb = 0$, 故 $b = 0$. 但若 $b = 0$, $(0, 1)$ 无法由 (a, b) 生成 \square

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

他们的子群 $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 呢?

Proof.

假设 G 为循环群, 不妨设其生成元为 (a, b) , 由于 $(1, 0) \in G$, 则存在 n , 使得 $nb = 0$, 故 $b = 0$ 。但若 $b = 0$, $(0, 1)$ 无法由 (a, b) 生成 \square

如何改造移动群使其成为循环群?

“移动”群-1

周晓

定义“移动群”

问题描述

问题求解

群

“移动”

直角坐标

极坐标

关于“移动”群的一些探讨

子群

是循环群吗

同构

直积

结论

他们的子群 $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 呢?

Proof.

假设 G 为循环群, 不妨设其生成元为 (a, b) , 由于 $(1, 0) \in G$, 则存在 n , 使得 $nb = 0$, 故 $b = 0$ 。但若 $b = 0$, $(0, 1)$ 无法由 (a, b) 生成 \square

如何改造移动群使其成为循环群?

- 这就是下一个 ot 的内容了

Thank
You!