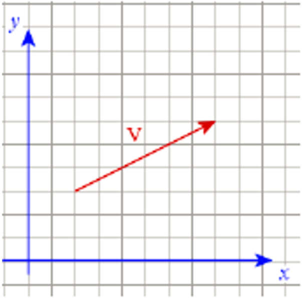
“移动”群-1

周晓

南京大学匡亚明学院

March 10, 2021

可以以二维平面上的“移动”为元素构建一个群吗?



- 群
- “移动”

- binary operation

$$G \times G \to G$$

- binary operation

$$G \times G \rightarrow G$$

- associative

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

- binary operation

$$G \times G \to G$$

- associative

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

- identity element

$$e \circ a = a \circ e = a$$

- binary operation

$$G \times G \to G$$

- associative

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

- identity element

$$e \circ a = a \circ e = a$$

- inverse element

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

二维平面的坐标移动

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

二维平面的坐标移动

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- 直角坐标
- 极坐标

集合元素

$$G = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

集合元素

$$G = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

运算

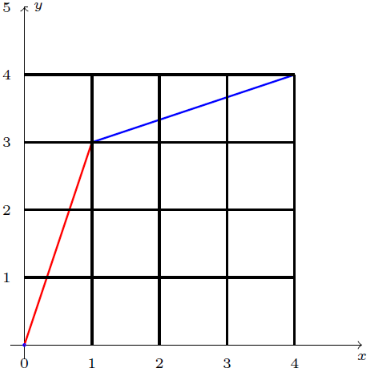
$$\circ : (x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

自然加法

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

$$(\{(x,y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

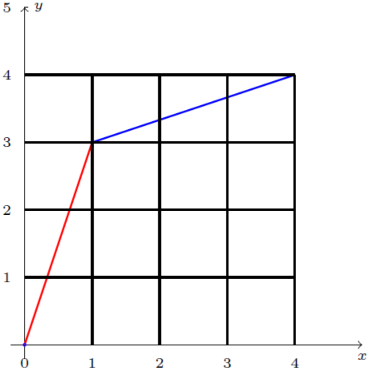
一个例子



$$(1,3) \circ (3,1) = (4,4)$$

$$(\{(x,y)|x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\},+)$$

一个例子



$$(1,3)\circ(3,1)=(4,4)$$

是群吗

$$(\{(x,y)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

- $+ : G \times G \to G$

$$(\{(x,y)|x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\},+)$$

- $+: G\times G\to G$
- Associative

$$((x_1,y_1)+(x_2,y_2))+(x_3,y_3)=(x_1,y_1)+((x_2,y_2)+(x_3,y_3))$$
$$=(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)$$

$$(\{(x,y)|x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\},+)$$

- $+: G\times G\to G$
- Associative

$$((x_1,y_1)+(x_2,y_2))+(x_3,y_3)=(x_1,y_1)+((x_2,y_2)+(x_3,y_3))$$
$$=(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)$$

- Identity element

$$(x,y)+(0,0)=(0,0)+(x,y)=(x,y)$$

$$(\{(x,y)|x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\},+)$$

- $+ : G\times G\to G$
- Associative

$$((x_1,y_1)+(x_2,y_2))+(x_3,y_3)=(x_1,y_1)+((x_2,y_2)+(x_3,y_3))$$
$$=(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)$$

- Identity element

$$(x,y)+(0,0)=(0,0)+(x,y)=(x,y)$$

- Inverse element

$$(x,y)+(-x,-y)=(-x,-y)+(x,y)=(0,0)$$

$$(\{(x,y)|x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\},+)$$

- $+:G\times G\to G$
- Associative

$$((x_1,y_1)+(x_2,y_2))+(x_3,y_3)=(x_1,y_1)+((x_2,y_2)+(x_3,y_3))$$
$$=(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)$$

- Identity element

$$(x,y)+(0,0)=(0,0)+(x,y)=(x,y)$$

- Inverse element

$$(x,y)+(-x,-y)=(-x,-y)+(x,y)=(0,0)$$

- Commutative

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_2,y_2)+(x_1,y_1)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

$$(\{(x,y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

- $+ : G \times G \to G$
- Associative

$$((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$

- Identity element

$$(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y)$$

- Inverse element

$$(x, y) + (-x, -y) = (-x, -y) + (x, y) = (0, 0)$$

- Commutative

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

是群，还是阿贝尔群！

集合元素

$$G = \{(r, \theta) | r \in \mathbb{R}, y \in [0, 2\pi)\}$$

集合元素

$$\mathrm{G} = \{(\mathrm{r}, \theta) | \mathrm{r} \in \mathbb{R}, \mathrm{y} \in [0, 2\pi)\}$$

运算

$$\circ : (\mathrm{r}_1, \theta_1) \circ (\mathrm{r}_2, \theta_2) = (\mathrm{r}_3, \theta_3)$$

集合元素

$$G = \{(r, \theta) | r \in \mathbb{R}, y \in [0, 2\pi)\}$$

运算

$$\circ : (r_1, \theta_1) \circ (r_2, \theta_2) = (r_3, \theta_3)$$

矢量加法

集合元素

$$G = \{(r, \theta) | r \in \mathbb{R}, y \in [0, 2\pi)\}$$

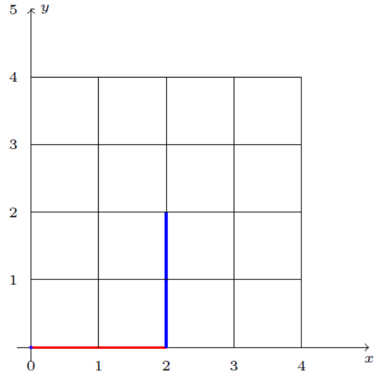
运算

$$\circ : (r_1, \theta_1) \circ (r_2, \theta_2) = (r_3, \theta_3)$$

矢量加法

换汤不换药

一个例子



$$(2,0)\circ(2,\frac{\pi}{2})=(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$$

如何判断 H 是否是子群?

- $\mathrm{e} \in \mathrm{H}$
- $\forall \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2 \in \mathrm{H}, \mathrm{h}_1 \mathrm{h}_2 \in \mathrm{H}$
- $\forall \mathrm{h} \in \mathrm{H}, \mathrm{h}^{-1} \in \mathrm{H}$

如何判断 H 是否是子群?

- $\mathrm{e} \in \mathrm{H}$
- $\forall \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2 \in \mathrm{H}, \mathrm{h}_1\mathrm{h}_2 \in \mathrm{H}$
- $\forall \mathrm{h} \in \mathrm{H}, \mathrm{h}^{-1} \in \mathrm{H}$

有很多子群

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\langle(\mathrm{x}, \mathrm{y})\rangle, \forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}$$

$$\cdots$$

同构 (isomorphic)

两个群 $(G,\cdot)$ 和 $(H,\circ)$，如果存在一个双射 $\phi : G \to H$ 满足

$$\forall a,b \in G, \phi(a\cdot b) = \phi(a)\circ\phi(b)$$

就称 G 与 H 同构，记作 $G \cong H$

Theorem

所有的无限循环群都同构于整数加法群

Theorem

所有的无限循环群都同构于整数加法群

Proof.

令 G 为一个无限阶的循环群，并设 a 为其生成元。定义一个映射 $\phi : \mathbb{Z} \to G : \phi(n) \mapsto a^n$。那么

$$\phi(m+n) = a^{m+n} = a^m a^n = \phi(m)\phi(n)$$

再证明 ϕ 为双射即可 $\square$

直积 (direct products)

两个群 $(G,\cdot)$ 和 $(H,\circ)$, 集合 $G\times H$(笛卡尔积) 以及运算

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1\cdot g_2,h_1\circ h_2)$$

也是一个群

回到移动群

$$(\{(x, y)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

$$(\{(r, \theta)|r \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi)\}, \circ)$$

回到移动群

$$(\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

$$(\{(r, \theta) | r \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi)\}, \circ)$$

上面定义的两个群是循环群吗?

回到移动群

$$(\{(\mathrm{x},\mathrm{y})|\mathrm{x}\in\mathbb{R},\mathrm{y}\in\mathbb{R}\},+)$$
$$(\{(\mathrm{r},\theta)|\mathrm{r}\in\mathbb{R},\theta\in[0,2\pi)\},\circ)$$

上面定义的两个群是循环群吗?

都不是，为什么?

回到移动群

$$(\{(x,y)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, +)$$

$$(\{(r,\theta)|r \in \mathbb{R}, \theta \in [0,2\pi)\}, \circ)$$

上面定义的两个群是循环群吗?

都不是，为什么?

Proof.

无限循环群都同构于整数加法群，即无限循环群都是可数的, 故都不为循环群 □

他们的子群 $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 呢?

他们的子群 $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 呢?

Proof.

假设 G 为循环群，不妨设其生成元为 (a, b)，由于 $(1, 0) \in G$, 则存在 n，使得 $nb = 0$，故 $b = 0$。但若 $b = 0$，$(0, 1)$ 无法由 (a, b) 生成 □

他们的子群 $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 呢?

Proof.

假设 G 为循环群，不妨设其生成元为 (a, b)，由于 $(1, 0) \in G$, 则存在 n，使得 $nb = 0$，故 $b = 0$。但若 $b = 0$，$(0, 1)$ 无法由 (a, b) 生成 □

如何改造移动群使其成为循环群?

他们的子群 $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 呢?

Proof.
假设 G 为循环群，不妨设其生成元为 (a, b)，由于 $(1, 0) \in G$, 则存在 n，使得 $nb = 0$，故 $b = 0$。但若 $b = 0$，$(0, 1)$ 无法由 (a, b) 生成 □

如何改造移动群使其成为循环群?

- 这就是下一个 ot 的内容了


Thank
You!