变换群和置换群

陶先平，赵建华

上一讲内容的回顾

- 不变子群
- 商群
- 同态核
- 自然同态
- 群同态基本定理
- 同态基本定理的应用

变换群与置换群

- 变换和变换群
- 置换及其表示
- 置换群
- 任意群与变换群同构
- 置换群的应用

变换和变换群

- 定义：A是非空集合，f:A→A称为A上的一个**变换**。
  - 经常讨论的是一一变换，即f是双射。
  - 变换就是函数，变换的“乘法”就是函数复合运算。
- 集合A上的一一变换关于变换乘法构成的群称为**变换群**。

非空集合上所有一一变换构成群

- 设A是任意的非空集合，A上***所有的***一一变换一定构成群。
  - 封闭性：双射的复合仍是双射。
  - 结合律：变换乘法是关系复合运算的特例。
  - 单位元：f:A→A，∀x∈A，f(x)=x满足对于任意g:A→A, $f\circ g=g\circ f=g$ (恒等变换)
  - 逆元素：任意双射g:A→A均有反函数g^{-1}:A→A, 即其逆元素。

变换群的例子

- G是R上所有如下形式的变换构成的集合 $\{f_{a,b} \mid f_{a,b}(x)=ax+b$，其中a,b是有理数，$a\neq 0\}$ 则G是变换群。
  - 封闭性：
  - 结合律：
  - 单位元：
  - 逆元素：

置换及其表示

- 定义：有限集合S上的双射σ:S→S称为S上的n元置换

- 记法：

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

置换的例子

- 集合S={1,2,3}上共有6个不同的置换， 它们的集合记为S_3：

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}\quad \alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}\quad \beta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}\quad \delta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}\quad \varepsilon=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

- S_3是最小的非交换群
  - 注意：质数阶群一定是可交换群。

轮换与对换

- **定义**：设σ是$S=\{1,2,\ldots,n\}$上的n元置换，且：

  $\sigma(i_1)=i_2$，$\sigma(i_2)=i_3$，…，$\sigma(i_{k-1})=i_k$，$\sigma(i_k)=i_1$，且$\forall x\in S$，$x\neq i_j$ $j=1,2,\ldots,k$，$\sigma(x)=x$，则称σ是S上的一个***k阶轮换***，当$k=2$，σ也称为***对换***。
- **记法**：$(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$
- **例子**：用轮换形式表示S_3的6个元素：
  - $e=(1)$; $\alpha=(1\ 2\ 3)$; $\beta=(1\ 3\ 2)$; $\gamma=(2\ 3)$; $\delta=(1\ 3)$; $\varepsilon=(1\ 2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

不相交的轮换相乘可以交换

- 给定S_n中两个轮换：

  $\sigma=(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k),\ \tau=(j_1\ j_2\ \ldots\ j_s),$

  若$\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}=\phi$，则称 σ 与 τ ***不相交***
- 若σ 与 τ 不相交，则$\sigma\tau = \tau\sigma$
  - 对任意$x\in S$, 分三种情况讨论：
  - $x\in\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$;
  - $x\in\{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$;
  - $x\in S-(\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}\cup\{j_1, j_2, \ldots, j_s\})$,

    均有$\sigma\tau(x) = \tau\sigma(x)$

用轮换的乘积表示置换

- *任一n元置换σ均可表示成一组互不相交的轮换的乘积。*
  - 对在σ下S中发生变化的元素的个数r 进行归纳：

    r =0，即σ是恒等置换。

    若r =k>0, 取一在σ下改变的元素i_1, 按照轮换的定义依次找出i_2, i_3 …。

    S是有限集，一定可以找到i_m, 使得i_1, i_2, …, i_m均不同，但$i_{m+1}\in\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$。

    必有$i_{m+1}=i_1$。(否则：若$i_{m+1}=i_j$, $j\neq 1$, 则$\sigma(i_{j-1})=\sigma(i_m)=i_j$, 与σ是一对一的矛盾。)

  令$\tau_1=(i_1\ i_2\ \ldots\ i_m)$，则$\sigma=\tau_1\sigma'$, σ'与$\tau_1$不相交，σ'最多只改变余下的k-m个元素，由归纳假设，$\sigma'=\tau_2\tau_3\ldots\tau_l$。

置换的轮换乘积形式

- 例子： $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 7)\ (4\ 8)$

- 例子： $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 1 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 5)\ (4\ 8\ 7\ 6)$

置换的轮换乘积形式的唯一性

- 如果置换σ可以表示为$\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_t$和$\tau_1\tau_2\ldots\tau_l$，令$X=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t\}$, $Y=\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l\}$, 则$X=Y$
  - 任取$\sigma_j\in X$, 不失一般性，令$\sigma_j=(i_1\ i_2\ \ldots\ i_m)$
  - 由于$\sigma(i_1)\neq i_1$, 必存在$\tau_s\in Y$, 使得i_1出现在τ_s中。由轮换的定义以及各轮换不相交，$i_2, i_3,\ldots, i_m$也必在τ_s中。若存在其它某个元素u也在τ_s中, 则u只能在m后面，则$\sigma(i_m)=\tau_s(i_m)=u$，同时又有$\sigma(i_m)=\sigma_j(i_m)=i_1$, 矛盾。所以$\sigma_j$即$\tau_s$。这说明$X\subseteq Y$, 同理可知$Y\subseteq X$。

用对换的乘积表示置换

- $k(k>1)$阶轮换$\sigma=(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$可以表示为$k-1$个对换的乘积：$(i_1 i_2)\ldots(i_1 i_{k-1})\ (i_1 i_k)$
- 证明：对k归纳。
  - $k=2$时显然成立。
  - 考虑$\sigma=(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k\ i_{k+1})$，只需证明$\sigma=(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)(i_1\ i_{k+1})$。
    分4种情况证明：$\forall x\in A$, $\sigma(x)=(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)(i_1\ i_{k+1})(x)$

    (1) $x\in\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}$

    (2) $x=i_k$

    (3) $x=i_{k+1}$

    (4) x为A中其它元素

对换乘积表示置换的例子

定义{1,2,3,4}上的函数 f 如下：

$f(1)=2, f(2)=3, f(3)=4, f(4)=1$

函数 f 的轮换形式：(1 2 3 4)

函数 f 的对换乘积形式：

(1 2) (1 3) (1 4)

令：

函数g: $g(1)=2, g(2)=1, g(3)=3, g(4)=4$

函数h: $h(1)=3, h(2)=2, h(3)=1, h(4)=4$

函数k: $k(1)=4, k(2)=2, k(3)=3, k(4)=1$

则：

$ghk(1)=k(h(g(1)))=k(h(2))=k(2)=2$

$ghk(2)=k(h(g(2)))=k(h(1))=k(3)=3$

$ghk(3)=k(h(g(3)))=k(h(3))=k(1)=4$

$ghk(4)=k(h(g(4)))=k(h(4))=k(4)=1$

排列中的逆序

- 设$i_1 i_2 \ldots i_n$是1,2,…,n的一种排列。对任意的i_j, i_k, 若$i_j > i_k$, 且$j<k$, 则称$i_j i_k$为一个***逆序***

- 排列中逆序总个数称为该排列的***逆序数***。

- 例子：(3 2 1 5 4)中3和2构成一个逆序，这里的逆序数是4

奇置换和偶置换

- σ 是 S 上的一个置换， σ $(j)=a_j$, $(j=1,2,\ldots,n)$。则σ的任意对换表示中的对换个数与排列$a_1, a_2, \ldots, a_n$的逆序数同奇偶性。
- 证明
  - ？？？
- 给定一个置换，其对换表示中的对换个数的奇偶性是确定的。
  - 奇置换/偶置换的定义

15-Puzzle

(1,5,3,7)(2,6,4,8)(9,10)(11,14,13,12)(15)(16)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

5	6	7	8
3	4	1	2
10	9	14	11
12	13	15	

5	6	7	8
3	4	15	2
10	9	14	11
12	13	1	

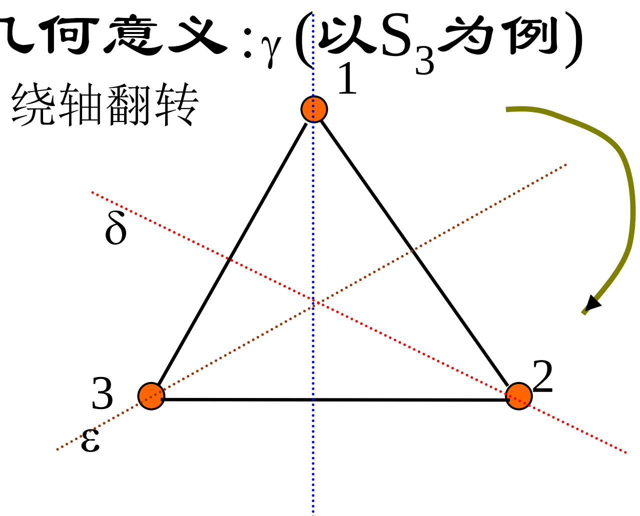
(1,5,3,7,15)(2,6,4,8)(9,10)(11,14,13,12)(16)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

不可能复原！

置换群

- *有限集合S上所有置换一定构成群*，称为对称群，记为S_n，其中n是S的阶数。
- S_n的任一子集若构成群，则是置换群。
  - 注意：置换群是变换群的特例，对称群是置换群的特例。
- S_n中所有的偶置换构成子群，称为交错群。(只须证明封闭性)
- 置换群的几何意义 :γ (以S_3为例)



顺时针旋转：
0度：e
120度：α
240度：β

基于已知群定义变换群的例子

- 对群(G,*)中任意一元素a, 可以定义：

  τ_a:G→G, $\forall x \in G$, $\tau_a(x)=x*a$,

  – τ_a是一一变换
    - τ_a是显然是函数
    - 对任意$b \in G$，群方程$x*a=b$有唯一解，即τ_a是满射
    - 由群满足消去律： $x*a=y*a \Rightarrow x=y$, 即τ_a是单射

  – 令$G' = \{\tau_a | a \in G\}$

Cayley定理

- ***任意的群G与一个变换群同构***。
  - 定义φ: G→G‘: $\forall a \in G$, $\varphi(a)=\tau_a$,其中$G'=\{\tau_a | a \in G\}$ 。
  - 则φ是同构映射
    - φ是函数： $a=b \Rightarrow \forall x \in G,\ x*a=x*b \Rightarrow \forall x \in G,\ \tau_a(x)=\tau_b(x) \Rightarrow \tau_a=\tau_b$
    - φ是满射： 显然
    - φ是单射： 根据消去律， $a \neq b \Rightarrow x*a \neq x*b \Rightarrow \tau_a \neq \tau_b$
    - 同构映射： $\varphi(a*b)=\tau_{(a*b)}$, $\therefore \forall x \in G$, $\varphi(a*b)(x)=\tau_{(a*b)}(x)=x*(a*b) =(x*a)*b=\tau_b(\tau_a(x))$, $\therefore$ $\varphi(a*b)=\tau_a \circ \tau_b=\varphi(a) \circ \varphi(b)$，这里“$\circ$”是函数复合运算。

利用置换群解题的例子

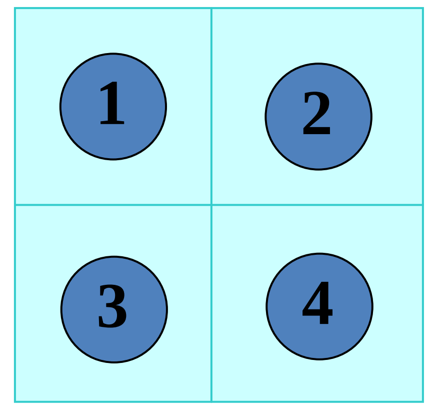
- 在四个方格子中放置了带有标号的四个盘子(见右图)。可以进行下列操作：

  (1) 上下行互换

  (2) 左右列互换

  (3) 两对对角元素互换

  进行上述操作任意有限多次，可以按照任意次序进行，包括交替进行。



- 问题：***操作停止时与开始时格局相同的充分必要条件是什么？***

采用置换群建立数学模型

- 定义集合{1,2,3,4}上的置换，并用轮换乘积形式表示如下：
  - f_1=(1,3)(2,4)，则f_1对应于动作1：上下互换；
  - f_2=(1,2)(3,4)，则f_2对应于动作2：左右互换；
  - f_3=(1,4)(2,3)，则f_3对应于动作3：对角互换；
- 令e=(1)，则({e, f_1, f_2, f_3}, ◦)构成**可交换置换群**
  - 注意：$(f_1 \circ f_2) = (f_2 \circ f_1) = f_3$；$(f_1 \circ f_3) = (f_3 \circ f_1) = f_2$；$(f_2 \circ f_3) = (f_3 \circ f_2) = f_1$；因此运算封闭且可交换；且e是单位元，每个元素的逆元即自己。
- 在此模型之下：***任意有限多次连续动作即等效于函数***

$$f = f_{i1} \circ f_{i2} \circ \ldots \circ f_{in}$$ 。其中$i_k \in \{1,2,3\}$

问题的解

- 任意有限多次连续动作即等效于函数

  $f = f_{i1} \circ f_{i2} \circ \ldots \circ f_{in}$。其中$i_k \in \{1,2,3\}$
- 所以：***开始格局与结束格局相同 当且仅当 $f = e$***
  - $(\{e, f_1, f_2, f_3\}, \circ)$是可交换群，$\therefore f = f_{i1} \circ f_{i2} \circ \ldots \circ f_{in} = f_1^{h} \circ f_2^{j} \circ f_3^{k}$，其中h, j, k是非负整数。
  - 注意：对i=1,2,3, 均有$f_i^{2k} = e$, 其中k是非负整数；$\therefore f = f_1^{s(h)} \circ f_2^{s(j)} \circ f_3^{s(k)}$，s(x)是整数集上的"奇偶特征函数"，当x为奇数，s(x)=1, 否则s(x)=0。
  - 注意：$f_1 \circ f_2 \circ f_3 = e$
- ∴开始格局与结束格局相同 当且仅当 ***动作1,2,3分别施行的次数同奇偶性***(与顺序无关)。

作业

- p.204
  - 29
  - 假设A,B,C,D是正方形的四个顶点; 定义集合{A,B,C,D}上8个置换,分别对应于正方形在平面内顺时针旋转0°, 90°, 180°, 270°, 以及分别围绕对角线或对边中点连线(各有两条)翻转。证明这8个置换与复合运算构成群，画出群表，并列出所有的子群。