

- 教材讨论  
– GC第7章

# 问题1：有向图的基本概念

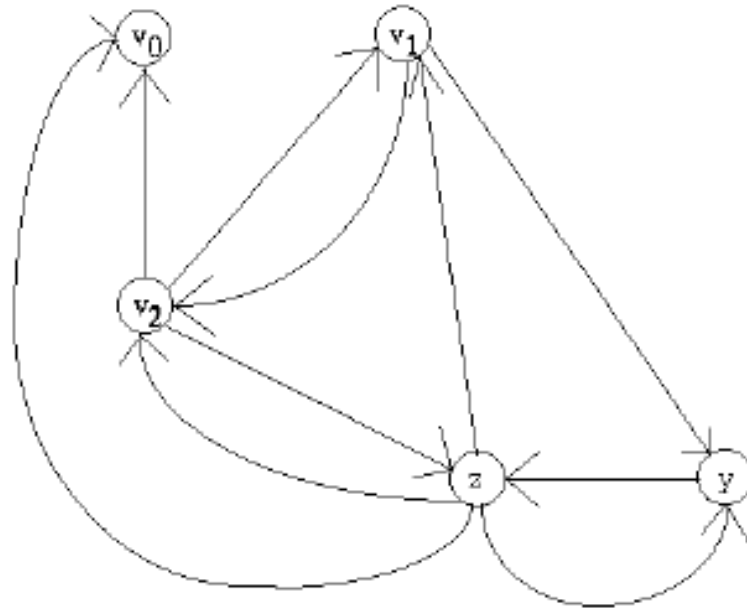
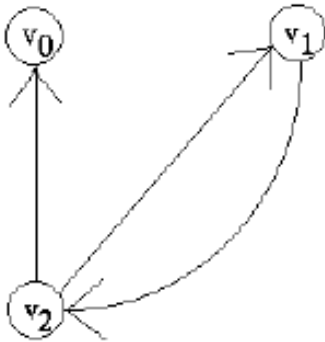
- 你能举出有向图在实际生活中的至少4个例子吗？
- 与无向图相比，这些概念在有向图中发生了怎样的变化？
  - edge、degree
  - (closed) walk、(closed) trail、path/cycle、distance
  - connectivity

# 问题2：有向图的度

- 有向图中，所有顶点的入度和等于出度和吗？
- 简单有向图中，顶点的出度有可能两两互不相同吗？  
在此基础上，顶点的入度有可能却都相同吗？  
如果有可能，你能造出多少个这样的图？

# 问题2：有向图的度

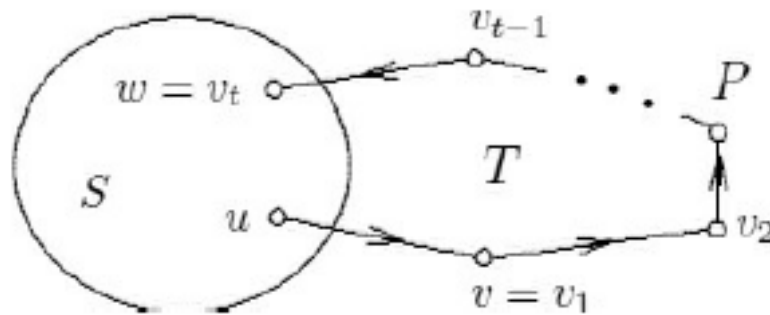
- 有向图中，所有顶点的入度和等于出度和吗？
- 简单有向图中，顶点的出度有可能两两互不相同吗？在此基础上，顶点的入度有可能却都相同吗？如果有可能，你能造出多少个这样的图？



# 问题3：图的定向

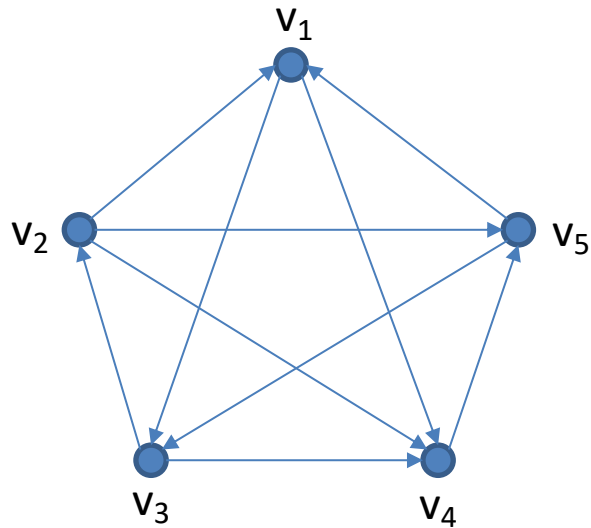
- 什么是定向(orientation)和底图(underlying graph)?
- 你能结合这个图简要证明强定向的充要条件吗?

**Theorem 7.5** *A nontrivial connected graph  $G$  has a strong orientation if and only if  $G$  contains no bridges.*



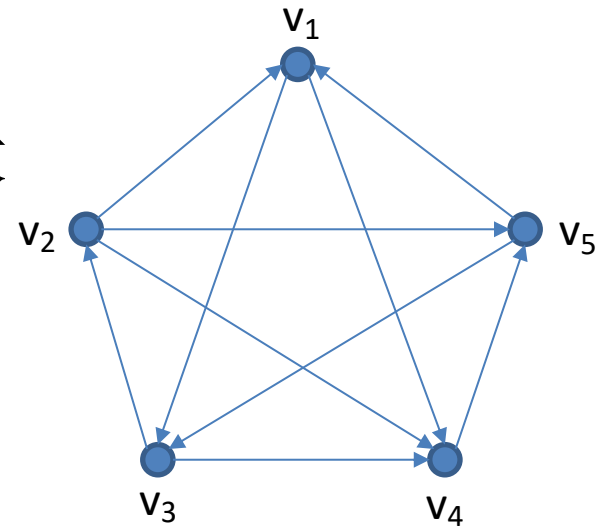
# 问题4：竞赛图

- 什么是竞赛图？
- 你能想到哪些方法来确定竞赛的胜者？



# 问题4：竞赛图 (续)

- 竞赛图中的王(king)
  - 到其它任何顶点都有长不超过2的有向路
- 王唯一吗？
- 王的充分条件（暨存在性）：出度最大
  - 你能证明吗？
  - 这同时也是必要条件吗？



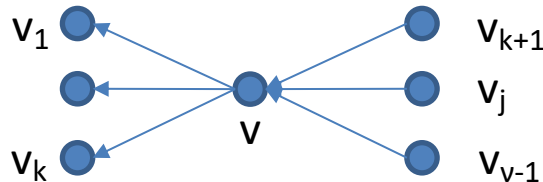
# 问题4：竞赛图 (续)

- 竞赛图中出度最大的顶点必为王。

证明：

设 $v$ 是出度最大的顶点。

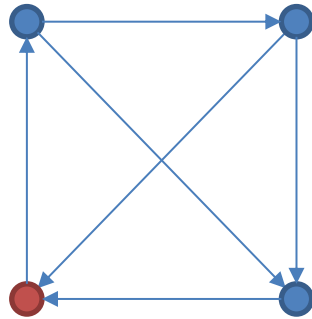
- 如果 $d^+(v)=v-1$ ：显然成立。
- 如果 $d^+(v)<v-1$ ，设 $v$ 的出邻点为 $v_1, \dots, v_k$ ，入邻点为 $v_{k+1}, \dots, v_{v-1}$ 
  - 对于 $v_{k+1}, \dots, v_{v-1}$ 中的每个 $v_j$ ：  
 $d^+(v_j) \leq d^+(v) \Rightarrow v_1, \dots, v_k$ 不可能都是 $v_j$ 的出邻点（为什么？）  
 $\Rightarrow$  其中某个是 $v_j$ 的入邻点  $\Rightarrow$  从 $v$ 到 $v_j$ 有长为2的有向路  $\Rightarrow$  得证





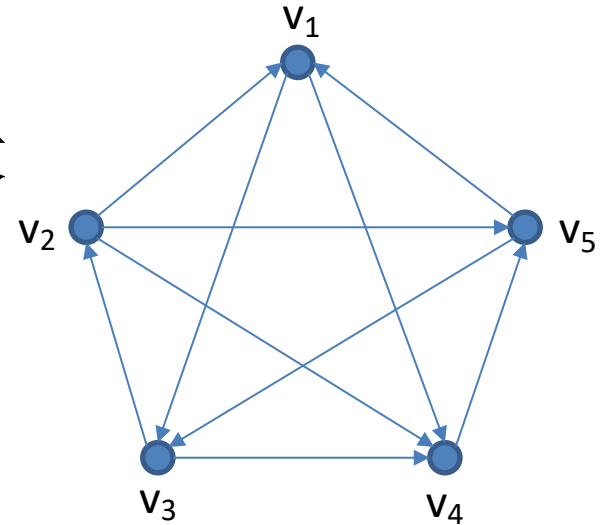
## 问题4：竞赛图 (续)

- 竞赛图中出度非最大的顶点也可能为王。



# 问题4：竞赛图 (续)

- 竞赛图中的王(king)
  - 到其它任何顶点都有长不超过2的有向路
- 王唯一吗？
- 王的充分条件（暨存在性）：出度最大
  - 你能证明吗？
  - 这同时也是必要条件吗？
- 你能为王的唯一性找一个充要条件吗？



# 问题4: 竞赛图 (续)

- 竞赛图中一个顶点 $v$ 是唯一的王当且仅当 $v$ 的出度为 $v-1$ 。

证明:

$\Rightarrow$ : 反证法

1. 假设唯一的王 $v$ 满足 $d^+(v) < v-1 \Rightarrow v$ 的所有入邻点导出的子竞赛图有自己的王 $u$

2.  $u$ 到 $v$ 有弧  $\Rightarrow u$ 到 $v$ 的出邻点有长为2的有向路

$\Rightarrow u$ 也是原图的王  $\Rightarrow v$ 不是唯一的王  $\Rightarrow$  矛盾

$\Leftarrow$ :  $d^+(v) = v-1 \Rightarrow v$ 是王且无入邻点  $\Rightarrow v$ 是唯一的王

