问题求解论题1-9

关系

陶先平

2015年11月19日

有序偶的集合表示形式

问题1:“有序”的有序偶表达需求该如何用“无序”的集合这样的数学模型来建模？

<a,b>的集合表现形式是{a,{a,b}}

二元关系的论域

问题2：就二元关系 $R \subseteq A \times B$ 而言，其论域是什么？

通常情况下，我们讨论A=B的一类特殊关系较多

就A上的关系R而言：

- 关系R可以采用集合、有向图和关系矩阵的多种表现形式

问题3：
在关系的计算机实现中，你会采用哪种形式去表达一个关系？

问题4：

你觉得下面的表示“奇怪”吗？

- 自然数集合上：“$<$”$\cup$“$=$” $=$ “$\leq$”
- 自然数集合上：“$\leq$”$\cap$“$\geq$” $=$ “$=$”
- 自然数集合上：“$<$”$\cap$“$>$” $= \phi$

问题5：你如何理解、区分上述式子中的“=”和=？

关系的“复合”运算

- 关系的复合运算
  - 运算法则：

如果$R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$,

则： R_1与 R_2的复合关系$R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$

且： $R_1 \circ R_2 = \{<x,z> | x \in A, z \in C$, 且存在 $y \in B$，使得$<x,y> \in R_1$, $<y,z> \in R_2\}$

关系的复合运算：例子

- 设$A=\{a,b,c,d\}$, R_1, R_2为A上的关系，其中：

  $R_1 = \{<a,a>,<a,b>,<b,d>\}$

  $R_2 = \{<a,d>,<b,c>,<b,d>,<c,b>\}$

- 则：

  $R_1 \circ R_2 = \{<a,d>,<a,c>,\}$

  $R_2 \circ R_1, = \{<c,d>\}$

  $R_1^2 = \{<a,a>,<a,b>,<a,d>\}$

  $R_2^3 = \{<b,a>,<c,c>,<b,c>,<b,d>,<c,b>\}$

很容易证明：关系的复合运算满足结合律。

“乘幂”的定义：
$R^1=R$, $R^n=R^{n-1} \circ R$

问题6：

关系可以用矩阵和图来表示，关系的复合运算在这两种表现形式下，如何解读？

自反性

- 集合A上的关系R:
  - 自反：定义为：对所有的 $a \in A$, $(a,a) \in R$
  - 反自反：定义为：对所有的$a \in A$, $(a,a) \notin R$

注意区分"非"与"反"

- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R \subseteq A \times A$
  - $\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,1),(3,3)\}$ 是自反的
  - $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ 是反自反的
  - $\{(1,2),(2,2),(2,3),(3,1)\}$ 既不是自反的，也不是反自反的

对称性

- 集合A上的关系R：
  - 对称的：定义为：若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$
  - 反对称的：定义为：若$(a,b)\in R$ 且$(b,a)\in R$，则$a=b$
  - 强反对称的：定义为：若 $(a,b)\in R$ 则 $(b,a)\notin R$
- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,3)\}$ 是对称的
  - $\{(1,2),(2,3),(2,2),(3,1)\}$ 是反对称的
  - $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ 既是反对称的，也是强反对称的

传递性

- 集合A上的关系R：
  - **传递的**：定义为：若 $(a,b)\in R$, $(b,c)\in R$, 则 $(a,c)\in R$
- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ 传递的
  - $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ 是非传递的
  - Both $\{(1,3)\}$和 ϕ 均为传递关系

问题7：

你是否遇到了在对称性、传递性判断上的困惑？

你是否理解什么叫“定义”？你是否能够从逻辑学上理解定义是什么？

你是否能够写出对称性(传递性)的逻辑定义，并借此帮助你判断关系的这两个性质？

等价关系的定义

- 满足性质：自反、对称、传递
- “等于”关系的推广
- 例子
  - 对3同余关系: $R \subseteq Z \times Z$， xRy 当且仅当 $\frac{|x-y|}{3}$ 是整数。
  - $R \subseteq N \times N$， xRy 当且仅当 存在正整数k,l，使得$x^k=y^l$。
    - 自反: 若x是任意正整数，当然$x^k=x^k$；
    - 对称：若有k,l, 使$x^k=y^l$；也就有l,k, 使$y^l=x^k$；
    - 传递：若有k,l, 使$x^k=y^l$；并有l,m, 使$y^l=z^m$；则有k,m, 使$x^k=z^m$

等价类

- R 是非空集合A上的等价关系，$\forall x \in A$，等价类 $[x]_R = \{y | y \in A \land xRy\}$
- 每个等价类是A的一个非空子集。
- 例子：对3同余关系: $R \subseteq Z \times Z$， xRy 当且仅当 $\frac{|x - y|}{3}$ 是整数。
  - 3 个等价类：$[0]=\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$;

    $[1]=\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 5, 7, \ldots\}$;

    $[2]=\{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$

等价类的代表元素

- 对于等价类$[x]_R=\{y|y\in A \wedge xRy\}$，x称为这个等价类的代表元素.
- 其实，该等价类的每个元
  ：若xRy，则$[x]=[y]$
  - 证明：对任意元素t, 若$t\in[x]$, 则xR 的对称性与传递性，且xRy, 可得yRt, 因此 $t\in[y]$, $\therefore[x]\subseteq[y]$; 同理可得$[y]\subseteq[x]$

问题8：现在你能理解什么叫“不失一般性”了吗？

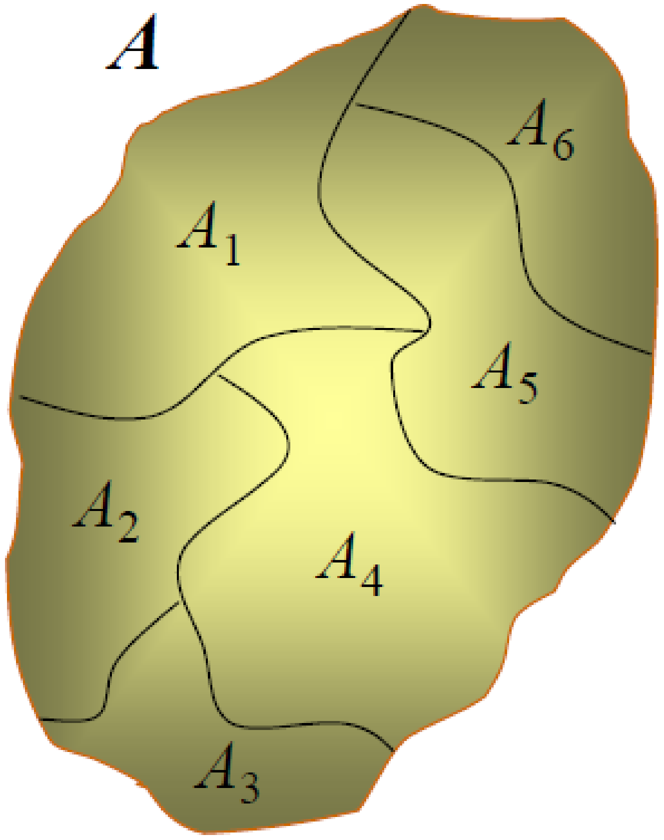
商集

- R是非空集合A上的等价关系，$\forall x \in A$，则其所有等价类的集合称为***商集***，A/R
- 集合$A=\{a_1,a_2, \ldots, a_n\}$上的恒等关系$I_A$是等价关系，商集$A/I_A=\{\{a_1\}, \{a_2\},\ldots, \{a_n\}\}$
- 定义自然数集的笛卡儿乘积上的关系R:

$$(a, b)R(c,d) \text{ 当且仅当 } a+d=b+c$$

证明这是等价关系，并给出其商集.

集合的划分



集合A的 分划 , π, 是A的一组非空子集的集合，即 $\pi\subseteq\rho(A)$, 且满足：

1. 对任意 $x\in A$, 存在某个 $A_i\in\pi$, 使得 $x\in A_i$.

$$\text{i.e.}\quad \bigcup_i A_i = A$$

2. 对任意 $A_i, A_j\in\pi$, 如果 $i\neq j$, 则：

$$A_i \cap A_j = \phi$$

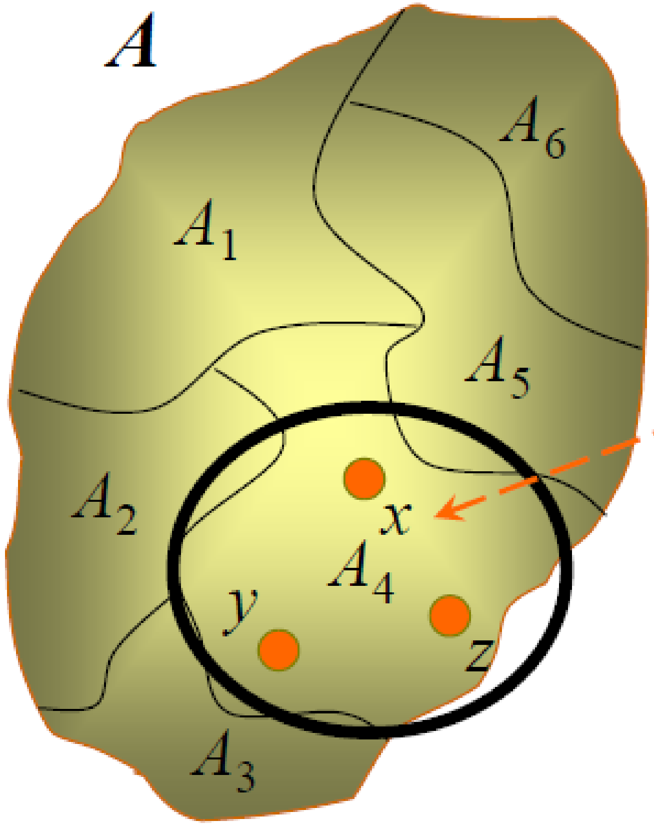
由等价关系定义的分划

- 假设R是集合A上的等价关系，给定$a \in A$, $R(a)$是由R 所诱导的等价类。
- $Q=\{R(x)|x \in A\}$是相应的商集。
- 容易证明，这样的商集即是A的一个分划：
  - 对任意 $a \in A$, $a \in R(a)$ (R 是自反关系)
  - 对任意 $a,b \in A$
    - $(a,b) \in R$ 当且仅当 $R(a)=R(b)$, 同时
    - $(a,b) \notin R$ 当且仅当 $R(a) \cap R(b)=\phi$

商集即分划 – 证明

- 不相等的等价类必然不相交。换句话说，有公共元素的任意两个等价类必然相等。
- 证明：
  - 假设$R(a) \cap R(b) \neq \varnothing$, c是任一公共元素。
  - 根据等价类的定义，$\langle a,c\rangle \in R$, $\langle b,c\rangle \in R$
  - 对任意$x \in R(a)$, $\langle a,x\rangle \in R$, 由R的传递性和对称性，可得$\langle c,x\rangle \in R$, 由此可知$\langle b,x\rangle \in R$, 即$x \in R(b)$, $\therefore R(a) \subseteq R(b)$
  - 同理可得：$R(b) \subseteq R(a)$。因此: $R(a)=R(b)$

根据一个分划定义等价关系



给定 A 上一个分划，可以如下定义A 上的等价关系 R :

$\forall x,y\in A, (x,y)\in R$ 当且仅当:

x,y 属于该分划中同一块。

Ex. $(x,y)\in R$ $(y,z)\in R$ $(x,z)\in R$ $(x,x)\in R$ etc.

显然，关系 R 满足自反性、对称性、传递性。因此：R 是等价关系。

鸽笼原理与等价类

- 证明：从1,2,...,2000中任取1001个数，其中必有两个数x,y,满足 $x/y=2^k$(K为整数).

解：建立1000个集合，每个集合包括1至2000之间的一个奇数以及该奇数与2的k次幂的乘积，但最大不超过2000。可以证明这1000个集合的集合是集合{1,2,3,..., 2000}上的一个划分。注意任意两个1到2000之间的正整数x,y在同一划分块中当且 $x/y=2^k$。(k为整数)。

这句话是可有可无还是必须证明？

这句话对我们建立基于鸽笼原理的证明有什么启发？

证明：定义集合{1,2,3,..., 2000}上的一个关系*R*，任意x,y，x*R*y当且仅当 $x/y=2^k$。易证这是一个等价关系。其商集即上面的划分。

问题9：

- 你应该自学过这些内容了，是不是？

A nonempty subset A of $\mathbb{R}$ is **bounded above**

bounded below

bounded

upper bound

lower bound

你能解释清楚这几个词的差异吗？

maximum vs **supremum** vs **least upper bound**

lower bound vs **infimum** (or **greatest lower bound**)

以下几个公理、定理，如果放在一起看，你会如何联想？

The completeness axiom of $\mathbb{R}$.
Every nonempty subset of real numbers that is bounded above has a supremum.

Theorem 12.9 (Archimedean property of $\mathbb{R}$).
Let a and b be two positive real numbers. Then there exists a positive integer n such that $a < nb$.

Theorem 12.11.
Let a and b be two real numbers satisfying $a < b$. Then there is a rational number c such that $a < c < b$.

最后一个问题：

已经证明了任何两个不相等的实数之间必有有理数，是否任何两个有不相等的有理数之间必有无理数？如果是，你有什么联想吗？