

- 教材讨论
 - UD第10、11、12章

问题1: 关系的基本概念

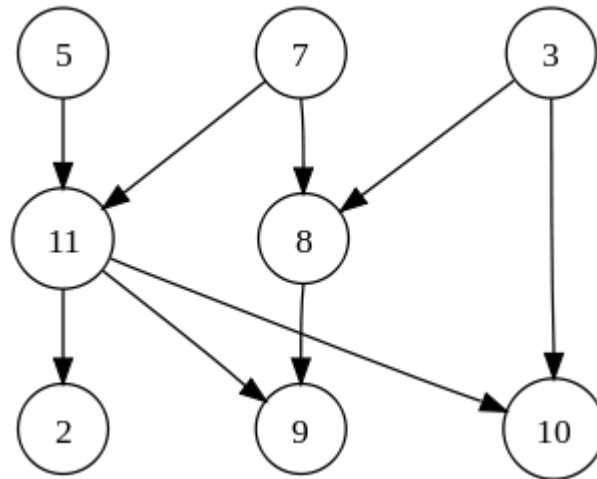
- 你理解这些关系了吗?
 - 自反 (reflexive)
 - 反自反 (irreflexive)
 - 对称 (symmetric)
 - 反对称 (antisymmetric) $\forall a, b \in X, R(a, b) \wedge R(b, a) \Rightarrow a = b$
 - 强反对称/非对称 (asymmetric) $\forall a, b \in X, aRb \Rightarrow \neg(bRa)$
 - 传递 (transitive)
 - 等价 (equivalence)
 - 偏序 (partial order)
 - 全序 (total order)

问题1：关系的基本概念 (续)

- 你能从日常生活中举出这些关系的例子吗？
 - 自反、对称、非传递
 - 自反、反对称、非传递
 - 反自反、对称、非传递
 - 反自反、反对称、非传递
 - 自反、对称、传递
 - 自反、反对称、传递
 - 反自反、对称、传递
 - 反自反、反对称、传递
 - 偏序、非全序
 - 全序

问题1: 关系的基本概念 (续)

- 这些关系对应的图有什么特征?
 - 自反
 - 对称
 - 传递
 - 偏序
 - 全序



问题1: 关系的基本概念 (续)

- 下面这个证明正确吗?

We claim that if a relation on a set X is symmetric and transitive, then it is reflexive. Here's a proof of this claim:

Proof. Let $x \in X$. Let $y \in X$ with $x \sim y$. By symmetry we have $y \sim x$. We now use transitivity to conclude that $x \sim x$. □

问题2：等价关系与划分

- \mathbb{N} 上的关系 R ，满足 $x \sim y$ 当且仅当 $\exists z \in \mathbb{Z}, (x-y=3z)$
 - R 是等价关系吗？
 - 如果是，它的等价类有哪些？（什么是等价类？）
 - 如果不是，那它是什么样的关系？

问题2：等价关系与划分 (续)

- 你能为以下这个集合定义出一些有意义的划分吗？
对应的等价关系分别是什么？



问题2：等价关系与划分 (续)

- 你能为以下这个集合定义出一些有意义的划分吗？
对应的等价关系分别是什么？

男



女



问题2：等价关系与划分 (续)

- 你能为以下这个集合定义出一些有意义的划分吗？对应的等价关系分别是什么？

篮球运动员



乒乓运动员



问题2：等价关系与划分 (续)

- 这是否意味着，一种划分可能对应多种等价关系？



问题3：数集的界、极值和确界

- 你能说出这三个概念之间的区别吗？

	可以有几个？	在原集合中吗？
上界 (upper bound)		
最大值 (maximum)		
上确界 (supremum)		

问题3：数集的界、极值和确界

- 你能说出这三个概念之间的区别吗？

	可以有几个？	在原集合中吗？
上界 (upper bound)	0或无穷多个	未必
最大值 (maximum)	0或1个	在
上确界 (supremum)	0或1个	未必

问题4：实数的完备性

- 你是如何理解实数的完备性或者有理数的不完备性的？（忘记教材）

问题4：实数的完备性

- 你是如何理解实数的完备性或者有理数的不完备性的？（忘记教材）
 - Intuitively, completeness implies that there are not any “gaps” or “missing points” in the real number line. This contrasts with the rational numbers, whose corresponding number line has a “gap” at each irrational value.

问题4：实数的完备性 (续)

- “有间隙”这件事情，你能想到什么数学方式来表达？

问题4：实数的完备性 (续)

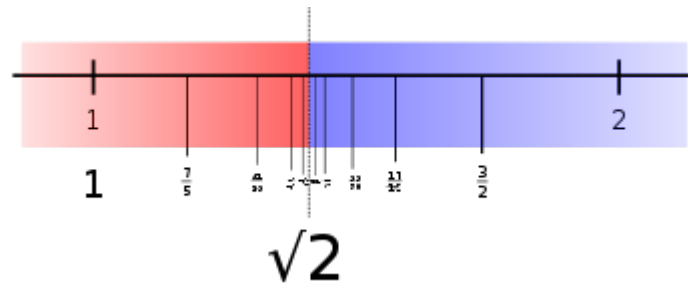
- “有间隙”这件事情，你能想到什么数学方式来表达？
 - A Dedekind cut, named after Richard Dedekind, is a partition of the rational numbers into two non-empty parts A and B , such that all elements of A are less than all elements of B , and A contains no greatest element.

问题4: 实数的完备性 (续)

- 有理数集上的Dedekind cut, B 是不是一定有最小元?

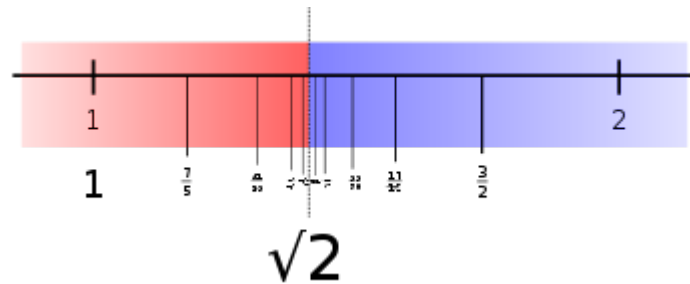
问题4: 实数的完备性 (续)

- 有理数集上的Dedekind cut, B是不是一定有最小元?
 - 有时候有
 - 有时候没有



问题4：实数的完备性 (续)

- 有理数集上的Dedekind cut, B是不是一定有最小元?
 - 有时候有
 - 有时候没有



- B总是有最小元 \Leftrightarrow 没有间隙 (刀刀命中)
 \Leftrightarrow 是完备的
- 按照这种定义, 有理数就是不完备的

问题4：实数的完备性 (续)

- 有理数虽然有间隙，但是“足够稠密”，你能想到什么数学方式来表达？

问题4：实数的完备性 (续)

- 有理数虽然有间隙，但是“足够稠密”，你能想到什么数学方式来表达？
 - 定理12.11. Let a and b be two real numbers satisfying $a < b$. Then there is a rational number c such that $a < c < b$.

问题4：实数的完备性 (续)

- 教材对于有理数不完备性的定义：
有理数的子集可能有上界但没有上确界。
 - 并举了一个例子 (Example 12.13)
- 事实上，两种对于完备性的定义是等价的。

问题5: well-ordering principle of \mathbb{N}

- 你理解well-ordering principle of \mathbb{N} 了吗?
- 你能利用数学归纳法证明吗?
 - 提示: 反证法

Well-ordering principle of the natural numbers. Every nonempty subset of the natural numbers contains a minimum.

对非空自然数集 S ，欲证 $\exists m \in S, (\forall x \in S, (m \leq x))$ 。
采用反证法，结论的negation是什么？

对非空自然数集 S ，欲证 $\exists m \in S, (\forall x \in S, (m \leq x))$ 。

采用反证法，结论的negation是什么？

$\forall m \in S, (\exists x \in S, (x < m))$ ，接下来，可以构造什么样的矛盾？

对非空自然数集 S ，欲证 $\exists m \in S, (\forall x \in S, (m \leq x))$ 。

采用反证法，结论的negation是什么？

$\forall m \in S, (\exists x \in S, (x < m))$ ，接下来，可以构造什么样的矛盾？

欲证矛盾：自然数集 S 是空集。利用归纳法， $Q(n)$ 是什么？

对非空自然数集 S ，欲证 $\exists m \in S, (\forall x \in S, (m \leq x))$ 。

采用反证法，结论的negation是什么？

$\forall m \in S, (\exists x \in S, (x < m))$ ，接下来，可以构造什么样的矛盾？

欲证矛盾：自然数集 S 是空集。利用归纳法， $Q(n)$ 是什么？

令 $Q(n)$ 表示 $n \notin S$ ，欲证 $Q(n)$ 对所有自然数都成立。

1. $Q(0)$ 显然成立，为什么？

对非空自然数集 S ，欲证 $\exists m \in S, (\forall x \in S, (m \leq x))$ 。

采用反证法，结论的negation是什么？

$\forall m \in S, (\exists x \in S, (x < m))$ ，接下来，可以构造什么样的矛盾？

欲证矛盾：自然数集 S 是空集。利用归纳法， $Q(n)$ 是什么？

令 $Q(n)$ 表示 $n \notin S$ ，欲证 $Q(n)$ 对所有自然数都成立。

1. $Q(0)$ 显然成立，为什么？
2. 给定自然数 n ，如果对所有自然数 $m < n$ ， $Q(m)$ 都成立，即 $m \notin S$ ，欲证 $Q(n)$ 成立。
 1. 采用反证法：如果 $Q(n)$ 不成立，则 $n \in S$ 。
 2. 则 $\exists x \in S, (x < n)$ ，为什么？

对非空自然数集 S ，欲证 $\exists m \in S, (\forall x \in S, (m \leq x))$ 。

采用反证法，结论的negation是什么？

$\forall m \in S, (\exists x \in S, (x < m))$ ，接下来，可以构造什么样的矛盾？

欲证矛盾：自然数集 S 是空集。利用归纳法， $Q(n)$ 是什么？

令 $Q(n)$ 表示 $n \notin S$ ，欲证 $Q(n)$ 对所有自然数都成立。

1. $Q(0)$ 显然成立，为什么？
2. 给定自然数 n ，如果对所有自然数 $m < n$ ， $Q(m)$ 都成立，即 $m \notin S$ ，欲证 $Q(n)$ 成立。
 1. 采用反证法：如果 $Q(n)$ 不成立，则 $n \in S$ 。
 2. 则 $\exists x \in S, (x < n)$ ，为什么？
 3. 但由 $x < n$ 可得 $x \notin S$ ，为什么？

对非空自然数集 S ，欲证 $\exists m \in S, (\forall x \in S, (m \leq x))$ 。

采用反证法，结论的negation是什么？

$\forall m \in S, (\exists x \in S, (x < m))$ ，接下来，可以构造什么样的矛盾？

欲证矛盾：自然数集 S 是空集。利用归纳法， $Q(n)$ 是什么？

令 $Q(n)$ 表示 $n \notin S$ ，欲证 $Q(n)$ 对所有自然数都成立。

1. $Q(0)$ 显然成立，为什么？
2. 给定自然数 n ，如果对所有自然数 $m < n$ ， $Q(m)$ 都成立，即 $m \notin S$ ，欲证 $Q(n)$ 成立。
 1. 采用反证法：如果 $Q(n)$ 不成立，则 $n \in S$ 。
 2. 则 $\exists x \in S, (x < n)$ ，为什么？
 3. 但由 $x < n$ 可得 $x \notin S$ ，为什么？
 4. 矛盾，所以 $Q(n)$ 成立。

问题5: well-ordering principle of \mathbb{N} (续)

- 我们在第17章中会看到: well-ordering principle of \mathbb{N} 和数学归纳法是等价的。