- 作业讲解
  - UD第13章问题3、4、5、7、11、13
  - UD第14章问题8、12、13、15
  - UD第15章问题1、6、7、11、12、13、14、15、20
  - UD第16章问题19、20、21、22
  - UD第27章项目6

UD第13章问题4

- 关键证明：min(A∩N)存在、属于Z、唯一
  - Well-ordering principle of N (P135)

UD第13章问题5(b)

- Make sure you look at all possibilities for A and X.
  - 如果A=X呢？
  - 如果A=∅呢？

UD第13章问题7

- 如何证明ran(f)=R\{1/2}？
  - 从ran(f)中任取y=(x-5)/(2x-3)，证明y在R\{1/2}中
  - 从R\{1/2}中任取y，证明R中存在x（猜一个x），使得f(x)=y

UD第14章问题8f

- $f(a)=(a,b)$
  - 如果$B=\{b\}$呢?

UD第14章问题15a

- 因为ran(f)=R，而ran(f·f)=[0,+∞)⊂ran(f)，所以f·f不可能是单射。这样证明对吗？
  - 首先，并非ran(f)=R，而是cod(f)=R
  - 其次，即便ran(f)=R，对于无限集合，也有可能存在到其无限真子集的单射，你能举出例子吗？（无限集合之间的大小关系，我们下周讨论）

UD第14章问题15b

- $ran(f \cdot f)=?$
  - 典型的错误1：$[0,+\infty)$
  - 典型的错误2：设$ran(f)=(a,b)$，则……

  - 正确答案：$\{x^2 : x \in ran(f)\}$

UD第15章问题6b

- What can you conclude about f and g from $f(g(x))=x$ and $g(f(x))=x$?
  - 互为反函数
- If you use a theorem, give a reference.
  - 定理15.4(iv)?
  - 定理15.8(iii)?

UD第15章问题11

- If $g_1 \cdot f = g_2 \cdot f$ and f is bijective, must $g_1 = g_2$?
  - 如果利用函数相等的定义来证明，就必须从 $\forall b \in B$开始

$\because f$是双射

$\therefore \forall b \in B, \exists a = f^{-1}(b) \in A$

$\because g_1 \circ f = g_2 \circ f$

$\therefore g_1(f(a)) = g_2(f(a))$

$\therefore g_1(b) = g_2(b)$

UD第15章问题15

- 哪个条件更恰当？
  - $A \cap C = \Phi$
  - $\forall x \in A \cap C,\ f(x) = g(x)$

UD第16章问题20a

$$\because f(A_1) = f(A_2)$$
$$\therefore f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(f(A_2))$$
$$\therefore A_1 = A_2$$

- 错在哪儿？

UD第16章问题21a

- 反例：$f^{-1}(B_1)=f^{-1}(B_2)=\Phi$

UD第16章问题21b

$\forall b \in B_1$

$\because f$是满射

$\therefore \exists a \in X, f(a) = b$

$\therefore a \in f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$

$\therefore f(a) \in B_2$

$\therefore b \in B_2$

$\therefore B_1 \subseteq B_2$

同理, $B_2 \subseteq B_1$

UD第27章项目6(1)

$\forall x \in dom(f)$

$\exists y, (x, y) \in f$

$\therefore \left(x, \frac{1}{y}\right) \in \frac{1}{f} = f^{-1}$

$\therefore f\left(\frac{1}{y}\right) = x$

$\therefore x \in ran(f)$

$\therefore dom(f) \subseteq ran(f)$

$\forall y \in ran(f)$

$\exists x, (y, x) \in f^{-1} = \frac{1}{f}$

$\therefore \left(y, \frac{1}{x}\right) \in f$

$\therefore y \in dom(f)$

$\therefore ran(f) \subseteq dom(f)$

- 教材讨论
  - DH第5章

问题1：程序设计中的错误

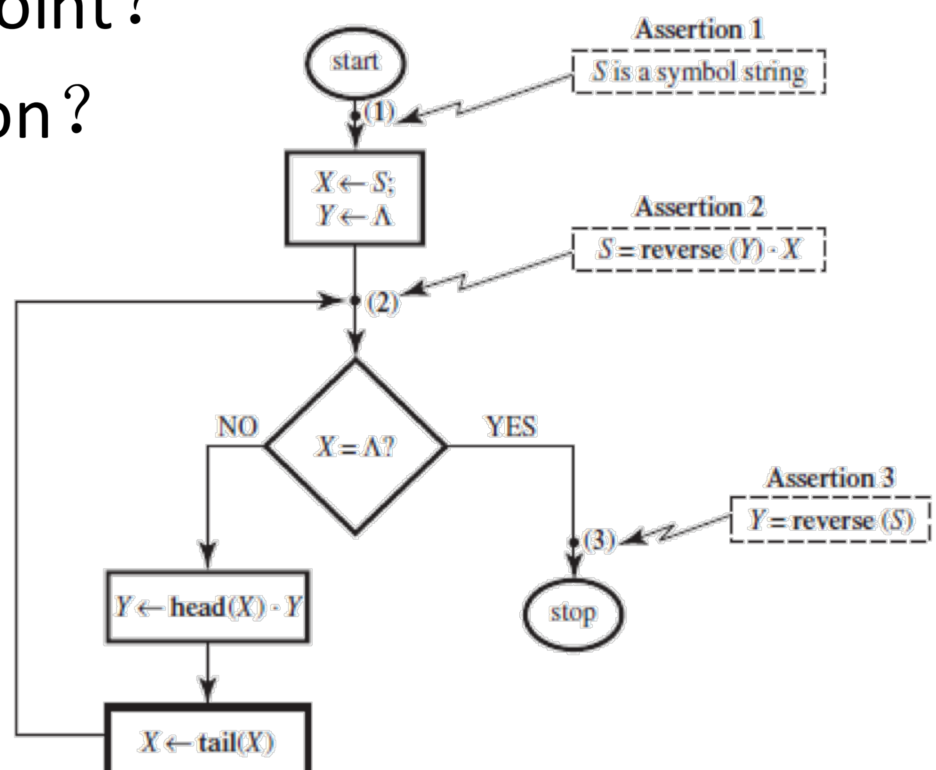
- 这些错误分别是什么意思？
  你犯过这些错误吗？说说你的教训
  如何避免/纠正这些错误？谈谈你的经验
  - Language error
  - Logical error
    - Semantic error
    - Algorithmic error
    - Run-time error
    - Infinite loop

问题2：算法的正确性

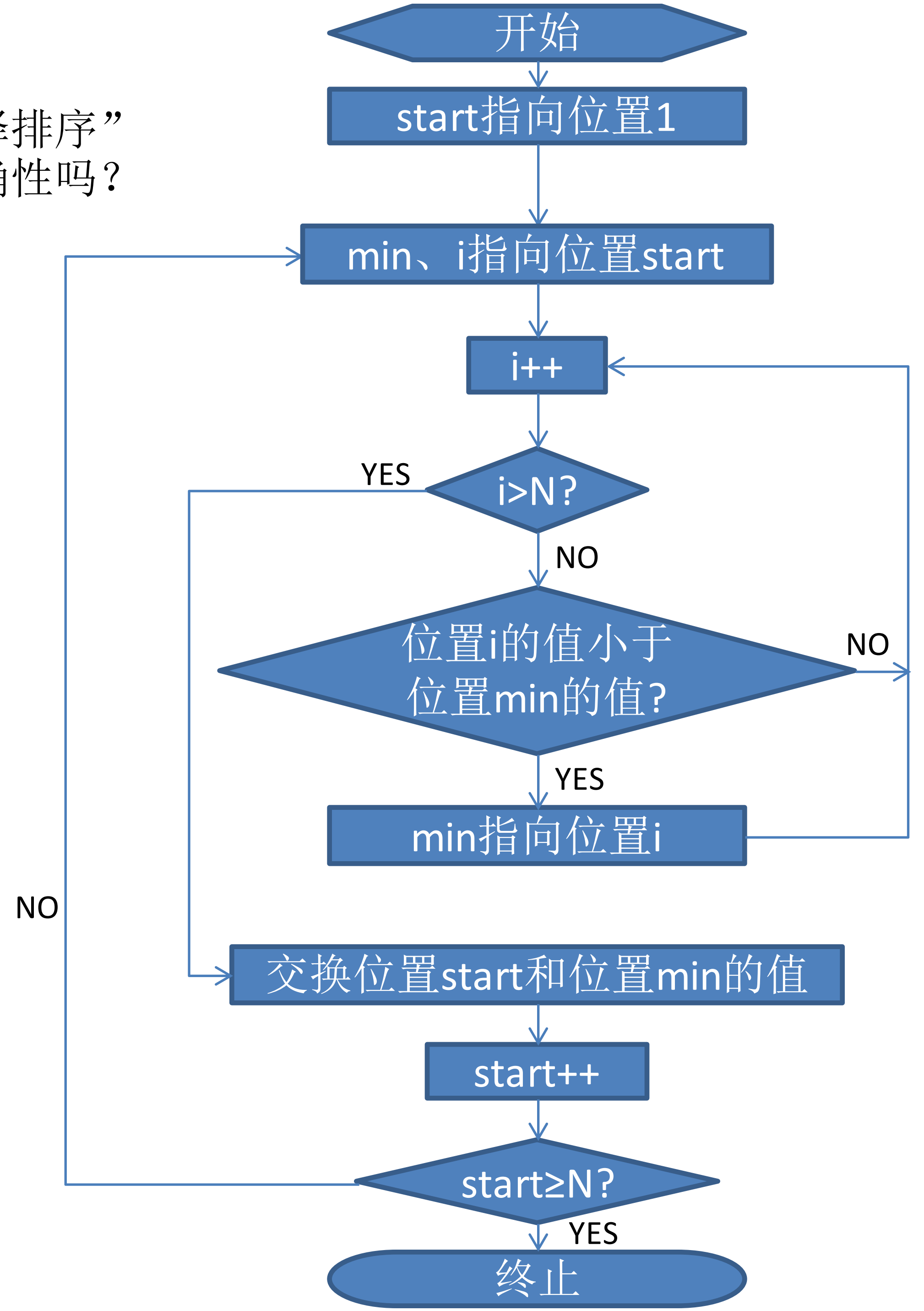
- 你理解这些重要概念了吗？
  - Partially correct
  - Termination
  - Totally correct

问题3：算法正确性的证明

- 你能结合书上的这个例子，解释一下算法正确性证明的基本方法吗？
  - 在哪设置checkpoint？
  - 如何设置assertion？



你能证明“选择排序”算法的完全正确性吗？



24
12
78
14
26
8
69
46

问题3：算法正确性的证明 (续)

- 通过上述证明过程，你是不是对as-you-go verification有了一些认识？

问题3：算法正确性的证明 (续)

- 你能结合书上的这个例子，解释一下带有递归的算法的正确性证明的基本方法吗？
  - 在哪设置checkpoint？
  - 如何设置assertion？

subroutine move N **from** X **to** Y **using** Z:

(1) if N is 1 then output "move X to Y";

(2) otherwise (that is, if N is greater than 1) do the following:
  (2.1) **call move** $N-1$ **from** X **to** Z **using** Y;
  (2.2) output "move X to Y";
  (2.3) **call move** $N-1$ **from** Z **to** Y **using** X;

(3) return.

Assume that the peg names A, B, and C are associated, in some order, with the variables X, Y, and Z. Then, a terminating execution of the call **move** *N* **from** *X* **to** *Y* **using** *Z lists a sequence of ring-moving instructions, which, if started (and followed faithfully) in any legal configuration of the rings and pegs in which at least the N smallest rings are on peg X, correctly moves those N rings from X to Y, possibly using Z as temporary storage. Moreover, the sequence adheres to the rules of the Towers of Hanoi problem, and it leaves all other rings untouched.*

你能证明“计算树中节点深度之和”
算法的完全正确性吗？

```
int sum=0;
search (Node n, int depth) {
  sum+=depth;
  for (int i=0; i<n.childrenNum; i++) {
    search (n.child[i], depth+1);
  }
}
```

你能证明“计算树中节点深度之和”
算法的完全正确性吗？

```
int sum=0;
search (Node n, int depth) {
  sum+=depth;
  for (int i=0; i<n.childrenNum; i++) {
    search (n.child[i], depth+1);
  }
}
```

归纳假设：search(n,depth)将且仅将以深度为depth的节点n为根的、包含节点数不超过N的子树中所有节点的深度累加到sum。

- 如何证明base case？
- 如何递推？