计算机问题求解 – 论题1–13

- 有限与无限

课程研讨

- UD第21-23章、第24章（选读）

问题1：等势和有限集合

- 什么叫做集合的等势 (equivalence)？
  - 直观上是什么意思？
  - 数学本质又是什么？
- 如何利用等势来定义集合的有限和无限？

- 什么叫做有限集合的势 (cardinality)？

问题1：等势和有限集合 (续)

- 你掌握了哪几种手段来证明一个集合是有限的？

问题1：等势和有限集合 (续)

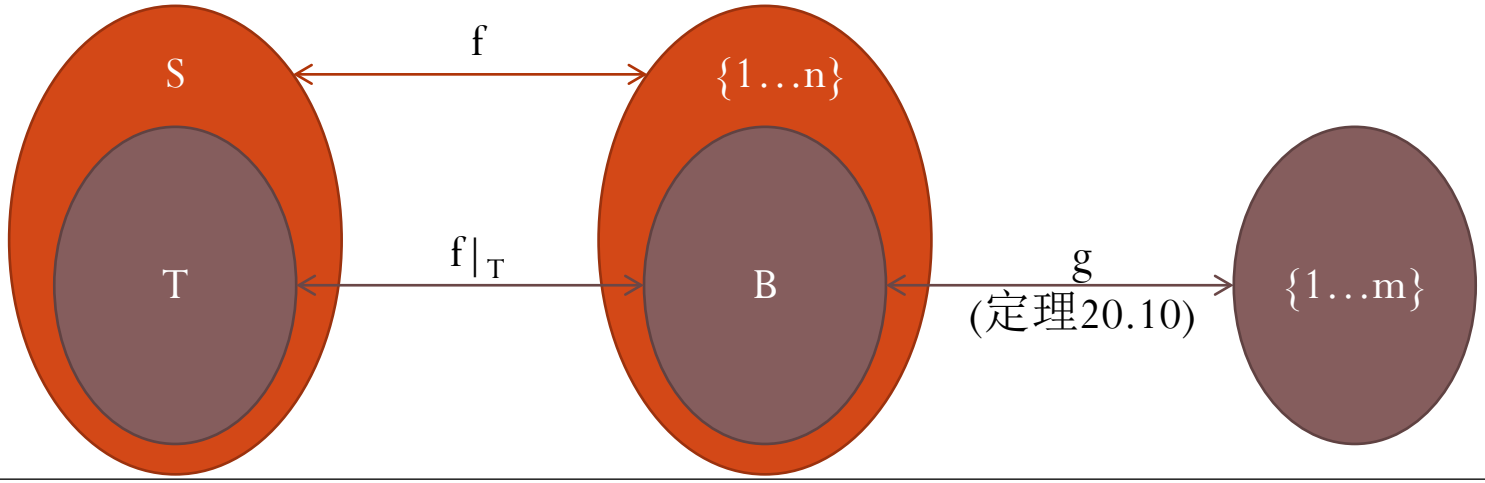
- 你掌握了哪几种手段来证明一个集合是有限的？
  - 为空集或者与{1,2,3,…,n}等势（定义）
  - 与另一个有限集合等势
  - 有限集合的子集也是有限集合（推论21.10）
  - 有限个有限集合的并也是有限集合（练习21.12）

问题1：等势和有限集合 (续)

- 你掌握了哪几种手段来证明一个集合是有限的？
  - 为空集或者与{1,2,3,…,n}等势（定义）
  - 与另一个有限集合等势
  - 有限集合的子集也是有限集合（推论21.10）
  - 有限个有限集合的并也是有限集合（练习21.12）
- 为什么？

问题1：等势和有限集合 (续)

- 你掌握了哪几种手段来证明一个集合是有限的？
  - 为空集或者与{1,2,3,…,n}等势（定义）
  - 与另一个有限集合等势
  - 有限集合的子集也是有限集合（推论21.10）
  - 有限个有限集合的并也是有限集合（练习21.12）
- 你能结合这个图来证明推论21.10吗？



问题1：等势和有限集合 (续)

- 你掌握了哪几种手段来证明一个集合是有限的？
  - 为空集或者与{1,2,3,…,n}等势（定义）
  - 与另一个有限集合等势
  - 有限集合的子集也是有限集合（推论21.10）
  - 有限个有限集合的并也是有限集合（练习21.12）
- 留作作业

问题2：无限集合

- 通过定理22.3的证明过程，你掌握了证明集合无限的一般方法了吗？
- 你还能想到哪些手段来证明集合是无限的？

问题2：无限集合

- 通过定理22.3的证明过程，你掌握了证明集合无限的一般方法了吗？
- 你还能想到哪些手段来证明集合是无限的？
  - 与另一个无限集合等势
  - 无限集合的超集也是无限集合

问题3：可数集合

- 什么是可数无限集合？什么是可数集合？
- 你掌握了哪几种手段来证明一个集合是可数的？

问题3：可数集合

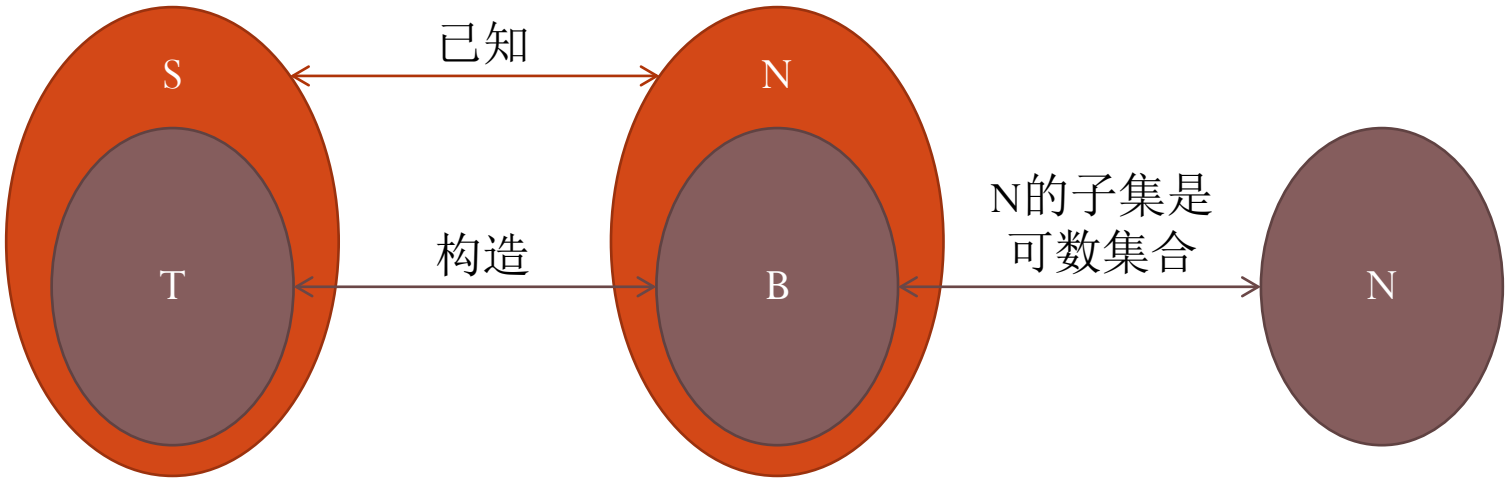
- 什么是可数无限集合？什么是可数集合？
- 你掌握了哪几种手段来证明一个集合是可数的？
  - 为有限集合或者与N等势（定义）
  - 与另一个可数集合（比如N的子集）等势
  - 可数集合的子集也是可数集合（推论23.4）
  - 存在到另一个可数集合（比如N）的单射（练习23.5）
  - 有限个可数集合的并也是可数集合（推论23.7）

问题3：可数集合

- 什么是可数无限集合？什么是可数集合？
- 你掌握了哪几种手段来证明一个集合是可数的？
  - 为有限集合或者与N等势（定义）
  - 与另一个可数集合（比如N的子集）等势
  - 可数集合的子集也是可数集合（推论23.4）
  - 存在到另一个可数集合（比如N）的单射（练习23.5）
  - 有限个可数集合的并也是可数集合（推论23.7）
- 为什么N的子集是可数集合？
  你能简要解释定理23.2的证明思路吗？

问题3：可数集合

- 什么是可数无限集合？什么是可数集合？
- 你掌握了哪几种手段来证明一个集合是可数的？
  - 为有限集合或者与N等势（定义）
  - 与另一个可数集合（比如N的子集）等势
  - 可数集合的子集也是可数集合（推论23.4）
  - 存在到另一个可数集合（比如N）的单射（练习23.5）
  - 有限个可数集合的并也是可数集合（推论23.7）
- 你能仿造之前的做法，画一个图来证明吗？


S
已知
N
T
构造
B
N的子集是
可数集合
N

问题3：可数集合

- 什么是可数无限集合？什么是可数集合？
- 你掌握了哪几种手段来证明一个集合是可数的？
  - 为有限集合或者与N等势（定义）
  - 与另一个可数集合（比如N的子集）等势
  - 可数集合的子集也是可数集合（推论23.4）
  - 存在到另一个可数集合（比如N）的单射（练习23.5）
  - 有限个可数集合的并也是可数集合（推论23.7）
- 为什么可以只要求是单射而不要求是满射？
  你能构造合适的单射，来证明N×N是可数集合吗？

问题3：可数集合

- 什么是可数无限集合？什么是可数集合？
- 你掌握了哪几种手段来证明一个集合是可数的？
  - 为有限集合或者与N等势（定义）
  - 与另一个可数集合（比如N的子集）等势
  - 可数集合的子集也是可数集合（推论23.4）
  - 存在到另一个可数集合（比如N）的单射（练习23.5）
  - 有限个可数集合的并也是可数集合（推论23.7）
- 你能将定理23.6的证明过程泛化吗？

问题4：不可数集合

- 通过定理23.12的证明过程，你掌握了证明集合不可数的一般方法了吗？
- 你还能想到哪些手段来证明集合是不可数的？

问题4：不可数集合

- 通过定理23.12的证明过程，你掌握了证明集合不可数的一般方法了吗？
- 你还能想到哪些手段来证明集合是不可数的？
  - 与另一个不可数集合等势
  - 不可数集合的超集也是不可数集合

问题5：metric

- 你理解metric函数的三大特征了吗？
  - 正定性、对称性、三角不等式

- 你能在这些集合上定义出一些有意义的metric吗？
  - 所有实数
  - 所有n维向量
  - 所有有限集合
  - 所有字符串