- 教材讨论
  - TC第28章

问题1：线性方程组求解

- 如何将线性方程组表示为矩阵形式？
- LUP分解的矩阵表示是什么？
  - L、U、P分别是怎样的矩阵？
- 如何用它来改写线性方程组的矩阵表示？

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 , \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 , \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n .
\end{aligned}
$$

问题1：线性方程组求解

- 如何将线性方程组表示为矩阵形式？
- LUP分解的矩阵表示是什么？
  - L、U、P分别是怎样的矩阵？
- 如何用它来改写线性方程组的矩阵表示？

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 , \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 , \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n .
\end{aligned}
$$

$Ax = b$ $\quad$ $PA = LU$ $\quad \Rightarrow \quad$ $LUx = Pb$

L： unit lower-triangular matrix

U： upper-triangular matrix

P： permutation matrix

问题1：线性方程组求解 (续)

- 接下来如何分两步求解？ $LUx = Pb$
- 分两步看起来更复杂了，能换来什么好处？

问题1：线性方程组求解 (续)

- 接下来如何分两步求解？ $LUx = Pb$
- 分两步看起来更复杂了，能换来什么好处？

$$LUx = Pb$$

$$\Downarrow$$

$$y = Ux$$

$$Ly = Pb$$

$$\Downarrow$$

$$Ux = y$$

问题1：线性方程组求解 (续)

- 你理解LUP-SOLVE了吗？

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0.8 & -0.6 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1.4 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= b_{\pi[1]}\,, \\
l_{21}y_1 + y_2 &= b_{\pi[2]}\,, \\
l_{31}y_1 + l_{32}y_2 + y_3 &= b_{\pi[3]}\,, \\
&\ \ \vdots \\
l_{n1}y_1 + l_{n2}y_2 + l_{n3}y_3 + \cdots + y_n &= b_{\pi[n]}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1,n-2}x_{n-2} + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n &= y_1\,, \\
u_{22}x_2 + \cdots + u_{2,n-2}x_{n-2} + u_{2,n-1}x_{n-1} + u_{2n}x_n &= y_2\,, \\
&\ \ \vdots \\
u_{n-2,n-2}x_{n-2} + u_{n-2,n-1}x_{n-1} + u_{n-2,n}x_n &= y_{n-2}\,, \\
u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n &= y_{n-1}\,, \\
u_{n,n}x_n &= y_n\,.
\end{aligned}$$

LUP-SOLVE(L, U, π, b)

$n = L.rows$
let x and y be new vectors of length n
for $i = 1$ **to** n
    $y_i = b_{\pi[i]} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j$
for $i = n$ **downto** 1
    $x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right)/u_{ii}$
return x

问题1：线性方程组求解 (续)

- 你理解LU-DECOMPOSITION了吗？

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ v & A' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - vw^{\mathrm{T}}/a_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & L'U' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v/a_{11} & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & U' \end{pmatrix} \\
&= LU\,,
\end{aligned}
$$

```
LU-DECOMPOSITION(A)
n = A.rows
let L and U be new n × n matrices
initialize U with 0s below the diagonal
initialize L with 1s on the diagonal and 0s above the diagonal
for k = 1 to n
    u_kk = a_kk
    for i = k + 1 to n
        l_ik = a_ik / a_kk          // a_ik holds v_i
        u_ki = a_ki                 // a_ki holds w_i
    for i = k + 1 to n
        for j = k + 1 to n
            a_ij = a_ij − l_ik u_kj
return L and U
```

2	3	1	5
6	13	5	19
2	19	10	23
4	10	11	31

(a)

2	3	1	5
3	4	2	4
1	16	9	18
2	4	9	21

(b)

2	3	1	5
3	4	2	4
1	4	1	2
2	1	7	17

(c)

2	3	1	5
3	4	2	4
1	4	1	2
2	1	7	3

(d)

问题1：线性方程组求解 (续)

- 为什么要permutation？
- 你能解释这些步骤吗？

$$
\begin{aligned}
QA &= \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ \nu & A' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - \nu w^{\mathrm{T}}/a_{k1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$P'(A' - \nu w^{\mathrm{T}}/a_{k1}) = L'U'$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} Q$$

$$
\begin{aligned}
PA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} QA \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - \nu w^{\mathrm{T}}/a_{k1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'\nu/a_{k1} & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & A' - \nu w^{\mathrm{T}}/a_{k1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'\nu/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & P'(A' - \nu w^{\mathrm{T}}/a_{k1}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'\nu/a_{k1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & L'U' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'\nu/a_{k1} & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k1} & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & U' \end{pmatrix} \\
&= LU \,,
\end{aligned}
$$

问题2：矩阵求逆

- 你能简要描述利用LUP分解求逆矩阵的思路吗？

- The proof of Theorem 28.2 suggests a means of solving the equation Ax=b by using LU decomposition without pivoting, so long as A is nonsingular.
  你理解这种新方法了吗？

问题2：矩阵求逆

- 你能简要描述利用LUP分解求逆矩阵的思路吗？

$$AX = I_n$$

$$AX_i = e_i$$

- The proof of Theorem 28.2 suggests a means of solving the equation Ax=b by using LU decomposition without pivoting, so long as A is nonsingular.
  你理解这种新方法了吗？

问题2：矩阵求逆

- 你能简要描述利用LUP分解求逆矩阵的思路吗？

$$AX = I_n$$

$$AX_i = e_i$$

- The proof of Theorem 28.2 suggests a means of solving the equation Ax=b by using LU decomposition without pivoting, so long as A is nonsingular.
  你理解这种新方法了吗？
  1. $(A^{\mathrm{T}}A)x = A^{\mathrm{T}}b$
  2. Factor the symmetric positive-definite matrix A^TA by computing an LU decomposition.
  3. Use forward and back substitution to solve for x with the right-hand side A^Tb.

问题3：求行列式

- 我们还可以利用LUP分解来求方阵的行列式，你能想到吗？

问题3：求行列式

- 我们还可以利用LUP分解来求方阵的行列式，你能想到吗？

$$A = P^{-1}LU$$

$$\det(A) = \det(P^{-1})\det(L)\det(U) = (-1)^S \left(\prod_{i=1}^{n} l_{ii}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} u_{ii}\right).$$

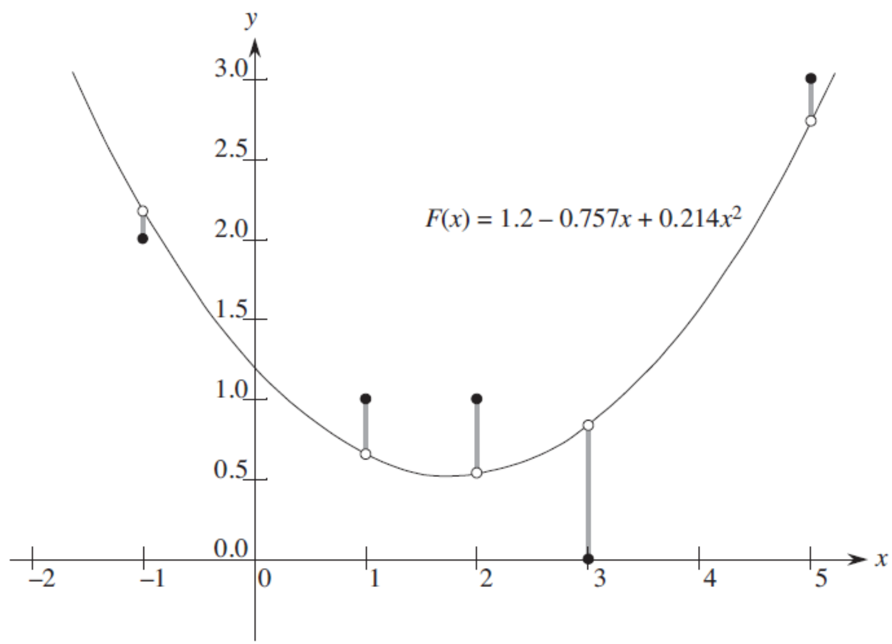
问题4：最小二乘法

- 最小二乘法想要解决的是一个什么问题？

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$$

$$\eta_i = F(x_i) - y_i$$

$$\|\eta\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2\right)^{1/2}$$



问题4：最小二乘法 (续)

- 你能解释这些步骤吗？

$$\|\eta\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2\right)^{1/2}$$

$$\|\eta\|^2 = \|Ac - y\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j - y_i\right)^2$$

$$\frac{d\,\|\eta\|^2}{dc_k} = \sum_{i=1}^{m} 2\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j - y_i\right) a_{ik} = 0$$

$$(Ac - y)^{\mathrm{T}} A = 0$$

$$A^{\mathrm{T}}(Ac - y) = 0$$

$$A^{\mathrm{T}} Ac = A^{\mathrm{T}} y$$

$$c \;=\; \left((A^{\mathrm{T}} A)^{-1} A^{\mathrm{T}}\right) y$$