计算机问题求解-论题1-2
–什么样的推理是正确的？

Logic--The discipline that deals with the methods of reasoning

计算机解题与数学

* 对问题的理解必须用严格的数学语言描述。
  * 其前提是必须建立问题的数学模型。
  * 可用的数学模型必须是计算机能对其进行操作的。
  * 让计算机能理解的解题plan必须建立在严密的数学基础上
* 将plan表示为计算机能执行的“指示”的语言必须建立在严密的数学基础上
* 分析计算机计算的结果必须使用数学方法：
  * 用逻辑证明结果正确；
  * 动用必要的数学手段分析解法的效率。

命题符号化及其逻辑代数推演

We know that Bill, Jim and Sam are from Boston, Chicago and Detroit, respectively. Each of following sentence is half right and half wrong:

Bill is from Boston, and Jim is from Chicago.
Sam is from Boston, and Bill is from Chicago.
Jim is from Boston, and Bill is from Detroit.

Tell the truth about their home town.

寻找答案

- 尽可能精确的表述问题
  - 例如：采用符号，用P
- 尽可能列出已经确定的信息，例如
  - 如果Bill来自波士顿，Jim就不会来自波士顿
  - 如果Sam来自波士顿，那么Bill就不会来自芝加哥
  - ……
- 剩下的是就是：“猜”+“推理”

可能的推理过程

* 如果第一句话的前半句是正确的，那么：
    * Bill来自波士顿 and
    * Jim不是芝加哥人 and
    * Jim也不是波士顿人 and
    * Bill就是底特律人
    * 因此矛盾；
* 因此，Jim一定是芝加哥人=》Sam是波士顿人=》Bill是底特律人

问题1：

如果这个题目中需要猜测的东 有效应对？

推理过程中，显然有些规律和 没有关系，我们应该从中得出什么启发？

能否借用数学的力量？

为阅读和构造证明而必须掌握的若干基本逻辑要素：形式化

* 基本元素：
  * 命题及其命题变元p
  * 逻辑连接符及其逻辑含义
  * 特殊的命题表达式
    * 可能式、永真式、永假式；
  * 逻辑等价
  * 谓词与变元
  * 量词

为阅读和构造证明而必须掌握的若干基本逻辑要素：形式化

* 基本操作：
  * 符号化自然语言表达的命题
    * 精确表达
  * 进行有效的推理，得到正确的结论
    * 正确推理
  * 进行高效的、可验证的证明
    * 证明方法

命题

* 命题指*可以*判断真假的陈述句
* 判断下列句子是否为命题
  - ✓ * 我的收入上升了
  - ✓ * 今天是星期二，在下雨
  - ✘ * 你会说英语吗?
  - ✘ * 3-x=5
  - ✓ * 任一足够大的偶数一定可以表示为两个素数之和。
  - ✘ * “我现在说的是假话。”

命题变元

* 常用小写字母表示命题变元，如： p, q, r
* 命题变元的取值范围为： $\{T, F\}$
* 命题也可以表示为命题变元的形式，可以理解为该变元“已赋值”
    * p: 今天是周五（p=F）
    * q: 2+2=4 （q =T）

原子命题与复合命题

* 自然语言中的复合句与连词
* 复合命题
  * 并非外面在下雨。
  * 张挥与王丽都是三好学生。
  * 张晓静不是江西人就是安徽人。
  * 如果2+3=6，则π是有理数。
  * $\sqrt{3}$是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。

显然：

复合命题是否为真，取决于：

作为复合成分的子命题的真假

以及

连词的语义

否定连接词

$\sim p$：非p

p	$\neg p$
F	T
T	F

$\neg$的真值表

p所有可能的取值

合取连接词

"p 并且 q" 表示为 $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

$p \wedge q$=T iff p 和 q 均为T

<p,q> 所有可能的取值

析取连接词

“p 或 q” 表示为 $p \vee q$

$p \vee q$=F iff both p and q 均为F

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

<p,q> 所有可能的取值

若干例

* 今天周一，开学第一天
* 我们周一和周五有离散数学课
* 我们周一或者周四踢足球

但是，套餐的菜单上写着：
鸡腿饭或者叉烧饭，苹果或香蕉

异或连接符

蕴涵连接词

"如果 p 则 q" 可以表示为 $p \to q$

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

双蕴含连接词

$p \leftrightarrow q$ 为真：意味着 p 和 q **总是** 有相同的真值。

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

每个连接词与我们日常生活中的某个连接词大致对应，但只是“大致”对应。对连接词的理解和使用严格按照真值表给出的“数学定义”

命题表达式的真值确定

* 表达式：$(\neg p\wedge q)\rightarrow\neg r$

p	q	r	$\neg p$	$\neg p\wedge q$	$\neg r$	$(\neg p\wedge q)\rightarrow\neg r$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1			1
0	1	0	1			1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1

该表达式的一种“成真指派”

该命题表达式的所有指派

重言式、矛盾式与可能式

- 所有指派均为成真指派：重言式
  - $(p\to q)\leftrightarrow(\sim q\to\sim p)$ 对任意的p,q值均为1，为重言式。
- 所有指派均为成假指派：矛盾式
  - $p\wedge\neg p$ 对任意的p值均为0，为矛盾式。
- 同时存在成真和成假指派：可能式
  - $(p\to q)\wedge(p\vee q)$:
    - 成真指派：(p,q) = (1,1) or (0,1)
    - 成假指派：(p,q) = (1,0) or (0,0)

逻辑等价

$(p\leftrightarrow q)\ \leftrightarrow\ ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$	$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

双蕴含连接符连接的命题表达式，如果所有指派均成真，称该符号连接的两个命题表达式逻辑等价，并记为：$A\equiv$B

$$(p\leftrightarrow q)\equiv((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$$

置换规则-等价式的应用

- 逻辑等价式在逻辑演算(表达式推演)和证明中起重要作用。
- 置换规则：设$\Phi(A)$是含表达式A的命题表达式，$\Phi(B)$是用表达式B置换了$\Phi(A)$中*所有*的A后得到的表达式。若$B \equiv A$，则$\Phi(B) \equiv \Phi(A)$。

$$(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$$

证明：$(p \to r) \wedge (q \to r)$

$\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ （蕴涵等价式）

$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$ （分配律）

$\equiv \neg(p \vee q) \vee r$ （德摩根律）

$\equiv (p \vee q) \to r$ （蕴涵等价式）

(DeMorgan's laws) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$;
$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$;

(Distributive property) $(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$;
$(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$;

(Double negation) $\neg(\neg P) \leftrightarrow P$;

(Associative property) $(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$;
$(P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$;

(Commutative property) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$;
$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$.

你选其中一个式子，试试画出它的真值表。

再次审视第一个范例：

符号化及其逻辑代数推演

We know that Bill, Jim and Sam are from Boston, Chicago and Detroit, respectively. Each of following sentence is half right and half wrong:

Bill is from Boston, and Jim is from Chicago.
Sam is from Boston, and Bill is from Chicago.
Jim is from Boston, and Bill is from Detroit.

Tell the truth about their home town.

命题符号化及其应用

- **We set :**
  - **P1 = Bill is from Boston**
  - **P2 = Jim is from Chicago.**
  - **P3 = Sam is from Boston**
  - **P4 = Bill is from Chicago.**
  - **P5 = Jim is from Boston**
  - **P6 = Bill is from Detroit.**
- **So, We have:**
  - $((p1 \wedge \sim p2) \vee (\sim p1 \wedge p2)) \wedge ((p3 \wedge \sim p4) \vee (\sim p3 \wedge p4)) \wedge ((p5 \wedge \sim p6) \vee (\sim p5 \wedge p6))$ **为真**

命题符号化及其应用

析取范式

等价替换：

$((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (\sim p_1 \wedge p_2)) \wedge ((p_3 \wedge \sim p_4) \vee (\sim p_3 \wedge p_4))$

$\equiv (((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (\sim p_1 \wedge p_2)) \wedge (p_3 \wedge \sim p_4)) \vee (((p_1 \wedge \sim p_2) \vee (\sim p_1 \wedge p_2)) \wedge (\sim p_3 \wedge p_4))$

$\equiv (p_1 \wedge \sim p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4) \vee (\sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4) \vee (p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \sim p_3 \wedge p_4) \vee (\sim p_1 \wedge p_2 \wedge \sim p_3 \wedge p_4))$

$\equiv \mathbf{F} \vee (\sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4) \vee \mathbf{F} \vee \mathbf{F}$

$\equiv \sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4$

由题意

继续：

$(\sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4) \wedge ((p_5 \wedge \sim p_6) \vee (\sim p_5 \wedge p_6))$

$\equiv (\sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \sim p_4 \wedge \sim p_5 \wedge p_6)$ 为真

So, Jim is from Chicago, Sam is from Boston, and Bill is from Detroit.

问题2：你为什么会相信“因为…所以…”？

* 因为外面在下雨，所以不能出门散步；
* 我们两个必须至少有一个人出席会议。因为我不能去，所以你必须去；
* 每个人都要死的。因为苏格拉底也是人，所以苏格拉底也是要死的

问题1的追问：为什么有时候我们又不相信“因为…所以…”？

* 因为外面在下雨，所以你不能玩电子游戏；
* 我们两个必须有一个人出席会议。因为我是会去的，所以你不能去；
* 因为人都是要死的，所以我们家的小猫也活不长。

再问：我们在相信“因为…所以…”时，到底在“相信”什么？

* 相信“所以…”表达的结论？
  * 不能出门散步！你要出席会议！苏格拉底要死！
  * 不能玩电子游戏？你不能出席会议？小猫活不长？

显然，我们可以任意构造“因为…所以…”句子，
我们到底怎样才能得到“为真”的结论？

再观察“因为...所以...”

- 因为人都是要死的，所以我家的小猫也会死的

猫是确定会死的，结论是正确的，但是这句话有因果关系吗？正确吗？

- 如果2+2=5，那么我就是超人！

什么叫“这句话是正确的”？

尽管我肯定不是超人，结论是错误的，但是这句话却是正确的！

显然，我们可以任意构造“因为...所以...”句子，我们到底怎样才能得到“为真”的结论并确信它为真？

分析因果论断的逻辑/数学基础，
建立逻辑正确的推理过程，才能
保证结论的正确性！

推理的一般解释：

* 从“前提”$A_1, A_2, \ldots, A_k$为真出发，推出“结论”B为真的推理（证明）过程。
  * 前提：下雨不适合户外运动；现在下雨
  * 结论：不宜出门散步
* 其中我们关心的是：
  * 结论是否正确
* 其实，我们更关心的是：
  * 推理（证明）过程是否正确！

当前提都正确的时候，
如果推理过程正确，
那么，结论一定正确！

推理过程

- 从前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$为真出发，推出结论B为真的推理过程是一个表达式序列，该序列最后一个表达式应是要证明的结论，而其它任一表达式满足如下的条件,：
  - 它可以是任意一个重言式；
  - 它可以是$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$中的任何一个表达式；
  - 可以是序列中前面的任一表达式通过应用“替换规则”得到的表达式；
  - 可以是对序列中前面任意一个或若干个表达式应用推理规则得到的新表达式
    - 例如：A, $(A \to B)$得到B

常用的蕴涵永真式

1. $A \to (A \vee B)$

2. $(A \wedge B) \to A$

3. $((A \to B) \wedge A) \to B$

4. $((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$

5. $((A \vee B) \wedge \neg B) \to A$

6. $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$

7. $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \to (A \leftrightarrow C)$

8. $((A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C)) \to (B \vee D)$

   $((A \to B) \wedge (\neg A \to B)) \to B$

9. $((A \to B) \wedge (C \to D) \to (\neg B \vee \neg D)) \to (\neg A \vee \neg C)$

蕴含重言式在逻辑推理中相当重要

蕴涵永真式导出的推理规则

附加律	1. $A \Rightarrow (A \vee B)$
化简律	2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$
假言推理	3. $((A \rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$
取拒式	4. $((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$
析取三段论	5. $((A \vee B) \wedge \neg B) \Rightarrow A$
假言三段论	6. $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \Rightarrow (A \rightarrow C)$
等价三段论	7. $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$
构造性二难	8. $((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C)) \Rightarrow (B \vee D)$ $((A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B)) \Rightarrow B$
破坏性二难	9. $((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \rightarrow (\neg B \vee \neg D)) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$

推理规则在推理过程中起到什么作用？

$$((A \rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$$

- 下雨不适合户外运动
  - 定义A:天下雨；定义B:不在户外运动；
  - 按照自然规律，我们认定前提1(A->
- 今天在下雨
  - 前提2(A)为真
- 因此 $(A \rightarrow B) \wedge A$ 为真！因此：B一定为真

从已知为真的事实以及规律中“得到”新的事实并确保新事实为真！

推理的正确性

* 前提：一组命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$
* 结论：一个命题公式B
* 所谓“推理正确”指：
  * 对诸A_i和B中出现的命题变元的任一指派，若前提的合取式为真，则结论必为真
  * 即“推理为正确的”当且仅当（$A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge Ak) \rightarrow B$是重言式
  * 说明：
    * $\Rightarrow$ 若推理正确，则或者$A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge Ak \equiv 0$，或者（$A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge Ak \equiv 1$，且$B \equiv 1$)，无论何种情况，上式为真，蕴涵式永真。
    * $\Leftarrow$ 若上述蕴涵式为永真式，且$A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge Ak$为真，B也必为真，因此推理正确。
  * **注意：若前提的合取式为假，推理总是正确的，或者说，推理正确并不保证结论正确**

推理的范例

* 以下推理正确吗？
  * 晚上编程序就没法早早睡觉；
  * 睡得早，起床早，上课不迟到；
  * 所以，要想不迟到，晚上千万不能编程序！
* 以下结论正确吗？
  * 只有认真预习，才能很好地理解课堂内容
  * 我理解了课堂内容
  * 所以我认真预习了

看看这个推理是否是正确的？

* 人都要死的
* 苏格拉底是人
* 所以，苏格拉底要死的

似乎束手无措！

谓词

- 如果x是整数，“x 大于2” 不是命题，它的真值依赖于x的取值
  - 可以将 “x大于2”表示为 $P(x)$。
- *谓词：*$P(x)$陈述可以视同关于x的一个P属性取值（一个函数）
  - P 的定义域是整数集，其值域是$\{1, 0\}$
  - *P(3)*是一个取值为T的命题
  - “for all x, P(x)” 是一个取值为F的命题
  - “存在一个x，P(x)” 是一个真值为T的命题

一个表现为谓词表达式的命题！

量词

- 若$P(x)$ 是谓词，$\forall xP(x)$表示 “对所有的x, $P(x)$”。 $\forall$称为***全称量词***
- 若$P(x)$ 是谓词，$\exists xP(x)$表示 “存在某个x, $P(x)$”。 $\exists$称为***存在量词***。
- 例：
    - $P(x)$表示$x>2$
    - $\forall xP(x)$为假， $\exists xP(x)$为真

关于量词使用的讨论

- 在量词作用域中如何使用连接词:
  - “每个人都知道中国。”：$\forall x\,(H(x)\to C(x))$
    - 这里：$H(x)$表示x是人；$C(x)$表示x知道中国。
  - “有人不知道危地马拉。”：$\exists x\,(H(x)\land\neg G(x))$
    - 这里：$G(x)$表示x知道危地马拉。

- 这个式子是否可以表达第一句话？
  - ✱ $\forall x C(x)$
  - 这个式子呢？$\forall x(H(x)\land C(x))$
- 下式是否表达了第二句话？
  - $\exists x(H(X)\to\neg G(x))$

关于论域/作用域的讨论

* 观察量化表达式：
  * $\forall \mathrm{x}(P(x) \wedge Q(x))$
  * $\forall \mathrm{x}(P(x,y) \wedge Q(x,y))$
  * $\forall \mathrm{x}P(x) \wedge \forall \mathrm{x}Q(x)$
  * $\forall \mathrm{x}P(x) \wedge \forall \mathrm{y}Q(y)$

  * 量化表达式中的变元：绑定、自由、作用域、替换

带量词的公式的否定式

在实数域上讨论

- 带全称量词的公式的否定式
  - 对所有的x, x的平方是正数
  - 否定：存在某个实数 x, 其平方不是正数。
- 带存在量词的公式的否定式
  - 存在x, 满足 $5x=x$.
  - 对任意的x, $5x\neq x$.

多个量词并用

* 考虑实数集：
  * $\forall x \forall y P(x,y)$ 与 $\forall y \forall x P(x,y)$ 总是有相同的真值。若$P(x,y)$ 表示$x+y=y+x$，则$\forall y \forall x P(x,y)$为真。
  * $\exists x \exists y P(x,y)$ 与 $\exists y \exists x P(x,y)$总是有相同的真值。若$P(x,y)$ 表示$x=y+1$，则$\exists y \exists x P(x,y)$为真。
  * 若$P(x,y)$ 表示“$y>x$” 则$\forall x \exists y P(x,y)$ 为真，但 $\exists y \forall x P(x,y)$ 为假。

自然语言语句的符号化

* 我们班上的所有同学都学过微积分
* 每封大于1MB的邮件都会被压缩
* 如果一个用户处于活动状态，那么该用户至少有一个有效网络连接
* 有一位妇女，去过世界上所有的国家

与量词有关的基本推理规则

- 全称例示 UI:
  - $\forall x P(x) \Rightarrow P(\mathrm{c})$
- 全称生成 UG:
  - $P(\mathrm{c})$,任意c $\Rightarrow \forall x P(x)$
- 存在例示 EI:
  - $\exists x P(x) \Rightarrow P(c)$,对该c
- 存在生成 EG:
  - $P(c)$,对某个c $\Rightarrow \exists x P(x)$

苏格拉底到底死不死？

* P(x): X是人；Q(X)：X要死
* 符号化及推理过程：
  * 人都是要死的：$\forall x(P(x)\text{->}Q(x))$

    P(苏格拉底)->Q(苏格拉底)
  * 苏格拉底是人：P(苏格拉底)
  * Q(苏格拉底)！

谓词表达式和命题之间的关系！

再一例

- 以下推论正确吗？
  - 有人喜欢喝茶，有人喜欢喝咖啡
  - 因此，有人既喜欢喝茶又喜欢喝咖啡
- 令：$A(x)$：x喜欢喝茶；$B(x)$：x喜欢喝咖啡
- 推理如下：

1. $\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$	Premise
2. $\exists xA(x)$	化简，1
3. $\exists xB(x)$	化简，1
4. $A(c)$	存在例示, 2
5. $B(c)$	存在例示, 3
6. $A(c)\wedge B(c)$	合取. 4,5
7. $\exists x(A(x)\wedge B(x))$	存在生成, 6

请思考

* 如何证明形如下列的谓词逻辑表达式命题：
  * $\exists x A(x)$
  * $\forall x P(x)$