计算机问题求解-论题1-2
–什么样的推理是正确的？

Logic--The discipline that deals with the methods of reasoning

计算机解题与数学

- 对问题的理解必须用严格的数学语言描述。
  - 其前提是必须建立问题的数学模型。
  - 可用的数学模型必须是计算机能对其进行操作的。
  - 让计算机能理解的解题plan必须建立在严密的数学基础上
- 将plan表示为计算机能执行的“指示”的语言必须建立在严密的数学基础上
- 分析计算机计算的结果必须使用数学方法：
  - 用逻辑证明结果正确；
  - 动用必要的数学手段分析解法的效率。

逻辑学是计算机科学的基石之一

- 程序验证：

```
if  x<0 then abs:=-x
         else abs:=x
```

是什么功能？对所有的合法输入，都能保证正确吗？

- 霍尔的初始/终结断言，证明程序相对于给予他们的规定是正确的：
  - 初始断言：T
  - 终结断言：abs=|x|

关于逻辑学奖金的逻辑性

- 已知：Smith, Brown, Jones, Robinson四人分别获得数学、英语、法语和逻辑学四门学科的奖金（每人一门，每奖一人）；但他们还不知道究竟谁得到哪个奖。
- 四人分别做如下的猜测：
  - Smith: Robinson得到了逻辑学奖。
  - Brown: Jones得到了英语奖。
  - Jones: Smith不可能得到数学奖。
  - Robinson: Brown得到的是法语奖。
- 后来发现：得到数学奖与逻辑学奖的人猜对了，其他两人猜错了。
- 问题：他们各人得的是什么 奖？

寻找答案

- 尽可能精确的表述问题
  - 例如：采用符号，用P(*x*)表示人x得了奖*P*
- 尽可能列出已经确定的信息，例如
  - 如果已知一个人得了奖X, 别人就不可能得奖X了。
  - 如果已知一个人不可能得某三种奖，那他得的一定是四种奖中另外一种。
  - 如何确定*x*说的话对，那就对；反之，如果说的话错，那其否定就对。
  - 四个人中任意两个人可能是猜对了的，因此他们分别获得数学与逻辑学奖，这有6种可能。
- 剩下的是就是："猜"+"推理"

可能的推理过程

如果我们猜测：BJ：“Brown和Jones得到数学和逻辑学奖”，则：
Brown的猜测是对的，即：Jones得了英语奖。
这不可能，因为根据假设：Jones得的是数学或者逻辑学奖。
因此：6种可能中一种，即BJ, 确定是不成立的。

如果我们猜测：RS：“Robinson和Smith得到数学和逻辑学奖”，则：
Robinson的猜测是对的，即：Brown得的是法语奖。
因此：Jones得了英语奖，因为他也不可能得数学或者逻辑学奖了。
这样，Brown猜Jones得英语奖是猜对了。
这与已知条件：只有获数学或者逻辑学奖的人猜的才是对的有矛盾！
因此：6种可能中的一种，即RS，确定是不成立的。

如果我们猜测：JR：“Jones和Robinson得到数学和逻辑学奖”，则：
因此：**Brown得到了法语奖**；而**Smith得到了英语奖**。
而Smith猜测Robinson得逻辑学奖是错的，因此，**Robinson得了数学奖**。
因此：**Jones得的是逻辑学奖**。Done!

问题1：

推理过程中，是否有些规律和被推理的具体内容没有关系？我们该如何更为有效地运用这些规律？

为阅读和构造证明而必须掌握的若干基本逻辑要素：形式化

* 基本元素：
  * 命题及其命题变元
  * 逻辑连接符及其逻辑含义
  * 特殊的命题表达式
    * 可能式、永真式、永假式；
  * 逻辑等价
  * 谓词与变元
  * 量词

为阅读和构造证明而必须掌握的若干基本逻辑要素：形式化

- 基本操作：
  - 符号化自然语言表达的命题
    - 精确表达
  - 进行有效的推理，得到正确的结论
    - 正确推理
  - 进行高效的、可验证的证明
    - 证明方法

命题

- 命题指**可以**判断真假的陈述句
- 判断下列句子是否为命题
  - ✓ 我的收入上升了
  - ✓ 今天是星期二，在下雨
  - ✗ 你会说英语吗?
  - ✗ 3−x=5
  - ✓ 任一足够大的偶数一定可以表示为两个素数之和。
  - ✗ “我现在说的是假话。”

命题变元

* 常用小写字母表示命题变元，如： p, q, r
* 命题变元的取值范围为： $\{T, F\}$
* 命题也可以表示为命题变元的形式，可以理解为该变元“已赋值”
  * p: 今天是周五（p=F）
  * q: 2+2=4（q =T）

原子命题与复合命题

* 自然语言中的复合句与连词
* 复合命题
    * 并非外面在下雨。
    * 张挥与王丽都是三好
    * 张晓静不是江西人就
    * 如果2+3=6，则π是有理
    * $\sqrt{3}$ 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。

显然：

复合命题是否为真，取决于：

作为复合成分的子命题的真假

以及

连词的语义

否定连接词

~p：非p

p	$\neg p$
F	T
T	F

¬的真值表

p所有可能的取值

合取连接词

"p 并且 q" 表示为 $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

$p \wedge q$=T iff p 和 q 均为T

$<p,q>$ 所有可能的取值

析取连接词

“p 或 q” 表示为 $p \vee q$

$p \vee q$=F iff both p and q 均为F

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

<p,q> 所有可能的取值

若干例

* 今天周一，开学第一天
* 我们周一和周五有离散数学课
* 我们周一或者周四踢足球

但是，套餐的菜单上写着：
鸡腿饭或者叉烧饭，苹果或香蕉

异或连接符

蕴涵连接词

"如果 p 则 q" 可以表示为 $p \to q$

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

双蕴含连接词

$p \leftrightarrow q$ 为真：意味着 p 和 q **总是** 有相同的真值。

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

每个连接词与我们日常生活中的某个连接词大致对应，但只是“大致”对应。对连接词的理解和使用严格按照真值表给出的“数学定义”

问题2：

真值表除了可以用来定义逻辑连接符的语义外，还能做什么？

命题表达式的真值确定

* 表达式：$(\neg p\wedge q)\rightarrow\neg r$

p q r	$\neg p$	$\neg p\wedge q$	$\neg r$	$(\neg p\wedge q)\rightarrow\neg r$
0 0 0	1	0	1	1
0 0 1	1			1
0 1 0	1			1
0 1 1	1	1	0	0
1 0 0	0	0	1	1
1 0 1	0	0	0	1
1 1 0	0	0	1	1
1 1 1	0	0	0	1

该表达式的一种“成真指派”

该命题表达式的所有指派

(DeMorgan's laws) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$;
$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$;

(Distributive property) $(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$;
$(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$;

(Double negation) $\neg(\neg P) \leftrightarrow P$;

(Associative property) $(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$;
$(P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$;

(Commutative property) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$;
$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$.

你选其中一个式子，试试画出它的真值表。

重言式、矛盾式与可能式

- 所有指派均为成真指派：重言式
  - $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim q\rightarrow\sim p)$ 对任意的p,q值均为1，为重言式。
- 所有指派均为成假指派：矛盾式
  - $p\wedge\neg p$ 对任意的p值均为0，为矛盾式。
- 同时存在成真和成假指派：可能式
  - $(p\rightarrow q)\wedge(p\vee q)$:
    - 成真指派：$(p,q) = (1,1)$ or $(0,1)$
    - 成假指派：(p,q) = (1,0) or (0,0)

逻辑等价

$$(p\leftrightarrow q)\ \leftrightarrow\ ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$$

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$	$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

双蕴含连接符连接的命题表达式，如果所有指派均成真，称该符号连接的两个命题表达式逻辑等价，并记为：$A\equiv B$

$$(p\leftrightarrow q)\equiv((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$$

置换规则-等价式的应用

- 逻辑等价式在逻辑演算(表达式推演)和证明中起重要作用。
- 置换规则：设$\Phi(A)$是含表达式A的命题表达式，$\Phi(B)$是用表达式B置换了$\Phi(A)$中**所有**的A后得到的表达式。若$B \equiv A$，则$\Phi(B) \equiv \Phi(A)$。

$$(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$$

证明：$(p \to r) \wedge (q \to r)$

$$\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \quad \text{（蕴涵等价式）}$$

$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \quad \text{（分配律）}$$

$$\equiv \neg (p \vee q) \vee r \quad \text{（德摩根律）}$$

$$\equiv (p \vee q) \to r \quad \text{（蕴涵等价式）}$$

* 问题3：

高中时代的“等式替换”和逻辑学中的“置换规则”有何关系？

命题符号化及逻辑代数推演

- 符号化下列命题：
  - 只有计算机系学生和老师，才能参加迎新晚会

- 几点提醒：
  - 复合命题的“原子命题”及其内部逻辑连接！
  - 自然语言有一定的歧义，注意观察和分析！

命题符号化若干例

* 验证下列系统规格说明是否一致：
  * 如果文件系统未加锁，那么新消息将被排成队
  * 如果文件系统未加锁，则系统处于正常运行，反之亦然；
  * 如果新消息尚未入队，就应该送入缓冲区；
  * 如果文件系统未加锁，新消息将被送入缓冲区；
  * 新消息不应被送入缓冲区

命题符号化及其逻辑代数推演

We know that Bill, Jim and Sam are from Boston, Chicago and Detroit, respectively. Each of following sentence is half right and half wrong:

Bill is from Boston, and Jim is from Chicago.
Sam is from Boston, and Bill is from Chicago.
Jim is from Boston, and Bill is from Detroit.

Tell the truth about their home town.

命题符号化及其应用

- **We set :**
  - **P1 = Bill is from Boston**
  - **P2 = Jim is from Chicago.**
  - **P3 = Sam is from Boston**
  - **P4 = Bill is from Chicago.**
  - **P5 = Jim is from Boston**
  - **P6 = Bill is from Detroit.**
- **So, We have:**
  - $((p1 \wedge \sim p2) \vee (\sim p1 \wedge p2)) \wedge ((p3 \wedge \sim p4) \vee (\sim p3 \wedge p4)) \wedge ((p5 \wedge \sim p6) \vee (\sim p5 \wedge p6))$ 应该可满足

命题符号化及其应用

析取范式

等价替换：

$((p_1\wedge\sim p_2)\vee(\sim p_1\wedge p_2))\wedge((p_3\wedge\sim p_4)\vee(\sim p_3\wedge p_4))$

$\equiv(((p_1\wedge\sim p_2)\vee(\sim p_1\wedge p_2))\wedge(p_3\wedge\sim p_4))\vee(((p_1\wedge\sim p_2)\vee(\sim p_1\wedge p_2))\wedge(\sim p_3\wedge p_4))$

$\equiv(p_1\wedge\sim p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4)\vee(\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4)\vee(p_1\wedge\sim p_2\wedge\sim p_3\wedge p_4)$
$\vee(\sim p_1\wedge p_2\wedge\sim p_3\wedge p_4))$

$\equiv \mathbf{F}\vee(\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4)\vee\mathbf{F}\vee\mathbf{F}$

$\equiv\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4$

由题意

继续：

$(\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4)\wedge((p_5\wedge\sim p_6)\vee(\sim p_5\wedge p_6))$

$\equiv(\sim p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\sim p_4\wedge\sim p_5\wedge p_6)$ 可满足

So, Jim is from Chicago, Sam is from Boston, and Bill is from Detroit.

析取（合取）范式的存在性

- 求 $(p\to q)\leftrightarrow r$ 的析取范式
  - $(\neg p\vee q)\leftrightarrow r$ （消去→）
  - $((\neg p\vee q)\wedge r)\vee(\neg(\neg p\vee q)\wedge\neg r)$ （消去↔ ）
  - $((\neg p\vee q)\wedge r)\vee((p\wedge\neg q)\wedge\neg r)$ （否定号内移）
  - $(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （分配律、结合律）

主析取（合取）范式的唯一性

* 求 $(p \to q) \leftrightarrow r$ 的主析取范式
  * $(\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ （析取范式）

$$\neg p \wedge r \equiv \neg p \wedge (\neg q \vee q) \wedge r$$
$$\equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$
$$q \wedge r \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

  * $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
  * $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$
  * 001　　011　　100　　111

问题4：

任意给定两个逻辑表达式，有哪些方法可以用来判断它们是否逻辑等值？其中，哪些方法适合计算机来完成？

逻辑等价的判定

- 命题逻辑等价的可判定性
  - **基于主析取（合取）范式的唯一性**
  - **指数级复杂性**
- 命题表达式的可满足性
  - 能否找到一个命题表达式的成真指派？
  - 第一个被证明是**NP**难的问题