LUP分解求矩阵的行列式

171860571 顾宬

引理证明

- $|AB| = |A| \cdot |B|$
- 设A，B都为n阶矩阵。

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}$$

- 可知 $|D_{2n}| = |A| \cdot |B|$

引理证明

- 在D_{2n}中以a_{i1}乘第n + 1行，a_{i2}乘第n + 2行，…，a_{in}乘第2n行，都加到第i行上，其中n = 1, 2, …, n。

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} O & C \\ -E & B \end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix} C & O \\ B & -E \end{vmatrix}=(-1)^n|C|\cdot|-E|=|C|$$

- 其中$C = (c_{ij})$, $c_{ij} = \Sigma a_{ik}b_{kj}$，即C = AB。
- 于是|AB| = |C| = |A| · |B|

矩阵的行列式值求解

- $P \cdot A = L \cdot U$

矩阵的行列式值求解

- $|P| \cdot |A| = |L| \cdot |U|$
- L为对角线元素均为1的下三角矩阵，故行列式为1。
- U为上三角矩阵，其行列式为对角线元素之积。
- P为置换矩阵，初始行列式值为1，每次交换行列式值取相反数。
- 即可求出 $|A|$。

拓展 矩阵求逆

- 利用学过的方程组求解。
- 下标表示第i列。
- $A \cdot A^{-1}_i = E_i$
- 然后求出A^{-1}的每一列。

拓展 埃尔米特矩阵

- 埃尔米特矩阵（又称“自共轭矩阵”）是共轭对称的方阵。埃尔米特矩阵中每个第i行第j列的元素都与第j行第i列的元素的共轭相等，记为A^H。
- 即 $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$
- 如 $\begin{bmatrix} 4 & 5-i & 1+2i \\ 5+i & 6 & 8 \\ 1-2i & 8 & 9 \end{bmatrix}$ 就是一个埃尔米特矩阵。
- 若仅在实数域上讨论，则埃尔米特矩阵即为对称矩阵。

拓展 Cholesky分解

- 如果矩阵A是埃尔米特矩阵，并且是正定矩阵，那么可以使U是L的共轭转置矩阵。
- 即将A写成A = LL*。
- 这个分解被称作Cholesky分解。对每一个正定矩阵，Cholesky分解都唯一存在。此外，比起一般的LU分解，计算Cholesky分解更为快捷，并具有更高的数值稳定性。

THANK YOU!

0